Conjuntos Ordenados

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Naciona de La Pampa

2022

Conjuntos ordenados

Definición

Sea P un conjunto. Un orden o orden parcial es una relación binaria $\leq$ sobre P tal que, $\forall x, y, z \in P$:

Conjuntos ordenados

Definición

Sea P un conjunto. Un orden o orden parcial es una relación binaria $\leq$ sobre P tal que, $\forall x, y, z \in P$:

- $x \leq x$

Conjuntos ordenados

Definición

Sea P un conjunto. Un orden o orden parcial es una relación binaria $\leq$ sobre P tal que, $\forall x, y, z \in P$:

- $x \leq x$
- $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$

Conjuntos ordenados

Definición

Sea P un conjunto. Un orden o orden parcial es una relación binaria $\leq$ sobre P tal que, $\forall x, y, z \in P$:

- $x \leq x$
- $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$
- $x \leq y$ e $y \leq z$ implica que $x \leq z$.

Conjuntos ordenados

Definición

Sea P un conjunto. Un orden o orden parcial es una relación binaria $\leq$ sobre P tal que, $\forall x, y, z \in P$:

- $x \leq x$
- $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$
- $x \leq y$ e $y \leq z$ implica que $x \leq z$.

Un conjunto P equipado con una relación de orden es llamado un conjunto ordenado o un conjunto parcialmente ordenado.

Conjuntos ordenados

Definición

Sea P un conjunto. Un orden o orden parcial es una relación binaria $\leq$ sobre P tal que, $\forall x, y, z \in P$:

- $x \leq x$
- $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$
- $x \leq y$ e $y \leq z$ implica que $x \leq z$.

Un conjunto P equipado con una relación de orden es llamado un conjunto ordenado o un conjunto parcialmente ordenado.

Toda relación de orden $\leq$ sobre P da lugar a una relación $<$ de desigualdad estricta:

$$x < y \iff x \leq y \text{ y } x \neq y.$$

Conjuntos ordenados

Ejemplo 1

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X.

Conjuntos ordenados

Ejemplo 1

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X. Entonces, la relación

$$A \leq B \iff A \subseteq B$$

es un orden sobre $\mathcal{P}(X)$.

Conjuntos ordenados

Ejemplo 1

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X. Entonces, la relación

$$A \leq B \iff A \subseteq B$$

es un orden sobre $\mathcal{P}(X)$.

Ejemplo 2

La relación $\leq_d$ definida sobre $\mathbb{N}$ por

Conjuntos ordenados

Ejemplo 1

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X. Entonces, la relación

$$A \leq B \iff A \subseteq B$$

es un orden sobre $\mathcal{P}(X)$.

Ejemplo 2

La relación $\leq_d$ definida sobre $\mathbb{N}$ por

$$n \leq_d m \iff n \mid m$$

es un orden sobre $\mathbb{N}$.

Cadena

Definición

Un conjunto ordenado P es llamado una cadena si $\forall x, y \in P$, $x \leq y$ o $y \leq x$.

Cadena

Definición

Un conjunto ordenado P es llamado una cadena si $\forall x, y \in P$, $x \leq y$ o $y \leq x$.

Ejemplo 3

- $\mathbb{N}$ con el orden usual es una cadena.
- El orden $\leq_d$ no es una cadena sobre $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$ con el orden usual es una cadena.
- $\mathbb{R}$ con el orden usual es una cadena.
- Dado un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ no es una cadena.

Cadena

Definición

Un conjunto ordenado P es llamado una cadena si $\forall x, y \in P$, $x \leq y$ o $y \leq x$.

Ejemplo 3

- $\mathbb{N}$ con el orden usual es una cadena.
- El orden $\leq_d$ no es una cadena sobre $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$ con el orden usual es una cadena.
- $\mathbb{R}$ con el orden usual es una cadena.
- Dado un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ no es una cadena.

Cadena

Definición

Un conjunto ordenado P es llamado una cadena si $\forall x, y \in P$, $x \leq y$ o $y \leq x$.

Ejemplo 3

- $\mathbb{N}$ con el orden usual es una cadena.
- El orden $\leq_d$ no es una cadena sobre $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$ con el orden usual es una cadena.
- $\mathbb{R}$ con el orden usual es una cadena.
- Dado un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ no es una cadena.

Cadena

Definición

Un conjunto ordenado P es llamado una cadena si $\forall x, y \in P$, $x \leq y$ o $y \leq x$.

Ejemplo 3

- $\mathbb{N}$ con el orden usual es una cadena.
- El orden $\leq_d$ no es una cadena sobre $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$ con el orden usual es una cadena.
- $\mathbb{R}$ con el orden usual es una cadena.
- Dado un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ no es una cadena.

Cadena

Definición

Un conjunto ordenado P es llamado una cadena si $\forall x, y \in P$, $x \leq y$ o $y \leq x$.

Ejemplo 3

- $\mathbb{N}$ con el orden usual es una cadena.
- El orden $\leq_d$ no es una cadena sobre $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$ con el orden usual es una cadena.
- $\mathbb{R}$ con el orden usual es una cadena.
- Dado un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ no es una cadena.

Cadena

Definición

Un conjunto ordenado P es llamado una cadena si $\forall x, y \in P$, $x \leq y$ o $y \leq x$.

Ejemplo 3

- $\mathbb{N}$ con el orden usual es una cadena.
- El orden $\leq_d$ no es una cadena sobre $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$ con el orden usual es una cadena.
- $\mathbb{R}$ con el orden usual es una cadena.
- Dado un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ no es una cadena.

Isomorfismo

Isomorfismo

Definición

Sean $\langle P, \leq_1 \rangle$ y $\langle Q, \leq_2 \rangle$ conjuntos ordenados. Diremos que P y Q son isomorficos si existe una función $\varphi\colon P \to Q$ sobreyectiva tal que $\forall x, y \in P$ se cumple que

$$x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Isomorfismo

Definición

Sean $\langle P, \leq_1 \rangle$ y $\langle Q, \leq_2 \rangle$ conjuntos ordenados. Diremos que P y Q son isomorficos si existe una función $\varphi \colon P \to Q$ sobreyectiva tal que $\forall x, y \in P$ se cumple que

$$x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Ejemplo 4

Sea $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ con el orden usual. Entonces la función sucesor $s \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ dada por

$$s(n) = n + 1$$

es un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{N}$.

Diagramas

Diagramas

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Diremos que x es cubierto por y si

$$x < y \text{ y no existe } z \in P \text{ tal que } x < z < y.$$

Escribimos $x \prec y$.

Diagramas

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Diremos que x es cubierto por y si

$$x < y \text{ y no existe } z \in P \text{ tal que } x < z < y.$$

Escribimos $x \prec y$.

Ejemplo 5

- En $\mathbb{N}$, $m \prec n \iff n = m + 1$.
- En $\mathbb{R}$, no existen $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \prec y$.
- En $\mathcal{P}(X)$, $A \prec B \iff B = A \cup \{b\}$, para algún $b \in X - A$.

Diagramas

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Diremos que x es cubierto por y si

$$x < y \text{ y no existe } z \in P \text{ tal que } x < z < y.$$

Escribimos $x \prec y$.

Ejemplo 5

- En $\mathbb{N}$, $m \prec n \iff n = m + 1$.
- En $\mathbb{R}$, no existen $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \prec y$.
- En $\mathcal{P}(X)$, $A \prec B \iff B = A \cup \{b\}$, para algún $b \in X - A$.

Diagramas

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Diremos que x es cubierto por y si

$$x < y \text{ y no existe } z \in P \text{ tal que } x < z < y.$$

Escribimos $x \prec y$.

Ejemplo 5

- En $\mathbb{N}$, $m \prec n \iff n = m + 1$.
- En $\mathbb{R}$, no existen $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \prec y$.
- En $\mathcal{P}(X)$, $A \prec B \iff B = A \cup \{b\}$, para algún $b \in X - A$.

Diagramas

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Diremos que x es cubierto por y si

$$x < y \text{ y no existe } z \in P \text{ tal que } x < z < y.$$

Escribimos $x \prec y$.

Ejemplo 5

- En $\mathbb{N}$, $m \prec n \iff n = m + 1$.
- En $\mathbb{R}$, no existen $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \prec y$.
- En $\mathcal{P}(X)$, $A \prec B \iff B = A \cup \{b\}$, para algún $b \in X - A$.

Diagramas

Sea P un conjunto ordenado. Representamos a P en el plano como sigue:

1. A cada elemento $x \in P$ le asociamos un punto en el plano.
2. Para cada par $x \prec y$, tomamos un segmento recto uniendo los puntos x e y.
3. Llevamos a cabo 1. y 2. de la siguiente forma:
   - si $x \prec y$, entonces el punto x está por debajo del punto y.
   - Un punto z no intersecta el segmento uniendo x con y si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Diagramas

Sea P un conjunto ordenado. Representamos a P en el plano como sigue:

1. A cada elemento $x \in P$ le asociamos un punto en el plano.
2. Para cada par $x \prec y$, tomamos un segmento recto uniendo los puntos x e y.
3. Llevamos a cabo 1. y 2. de la siguiente forma:
   - si $x \prec y$, entonces el punto x está por debajo del punto y.
   - Un punto z no intersecta el segmento uniendo x con y si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Diagramas

Sea P un conjunto ordenado. Representamos a P en el plano como sigue:

1. A cada elemento $x \in P$ le asociamos un punto en el plano.
2. Para cada par $x \prec y$, tomamos un segmento recto uniendo los puntos x e y.
3. Llevamos a cabo 1. y 2. de la siguiente forma:
    - si $x \prec y$, entonces el punto x está por debajo del punto y.
    - Un punto z no intersecta el segmento uniendo x con y si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Diagramas

Sea P un conjunto ordenado. Representamos a P en el plano como sigue:

1. A cada elemento $x \in P$ le asociamos un punto en el plano.
2. Para cada par $x \prec y$, tomamos un segmento recto uniendo los puntos x e y.
3. Llevamos a cabo 1. y 2. de la siguiente forma:
   - si $x \prec y$, entonces el punto x está por debajo del punto y.
   - Un punto z no intersecta el segmento uniendo x con y si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Diagramas

Sea P un conjunto ordenado. Representamos a P en el plano como sigue:

1. A cada elemento $x \in P$ le asociamos un punto en el plano.
2. Para cada par $x \prec y$, tomamos un segmento recto uniendo los puntos x e y.
3. Llevamos a cabo 1. y 2. de la siguiente forma:
   - si $x \prec y$, entonces el punto x está por debajo del punto y.
   - Un punto z no intersecta el segmento uniendo x con y si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Diagramas

Sea P un conjunto ordenado. Representamos a P en el plano como sigue:

1. A cada elemento $x \in P$ le asociamos un punto en el plano.
2. Para cada par $x \prec y$, tomamos un segmento recto uniendo los puntos x e y.
3. Llevamos a cabo 1. y 2. de la siguiente forma:
   - si $x \prec y$, entonces el punto x está por debajo del punto y.
   - Un punto z no intersecta el segmento uniendo x con y si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Diagramas

Sea P un conjunto ordenado. Representamos a P en el plano como sigue:

1. A cada elemento $x \in P$ le asociamos un punto en el plano.
2. Para cada par $x \prec y$, tomamos un segmento recto uniendo los puntos x e y.
3. Llevamos a cabo 1. y 2. de la siguiente forma:
   - si $x \prec y$, entonces el punto x está por debajo del punto y.
   - Un punto z no intersecta el segmento uniendo x con y si $z \neq x$ y $z \neq y$.

La representación de P es llamado el diagrama de Hasse de P.

Diagramas

Sea P un conjunto ordenado. Representamos a P en el plano como sigue:

1. A cada elemento $x \in P$ le asociamos un punto en el plano.

2. Para cada par $x \prec y$, tomamos un segmento recto uniendo los puntos x e y.

3. Llevamos a cabo 1. y 2. de la siguiente forma:
   - si $x \prec y$, entonces el punto x está por debajo del punto y.
   - Un punto z no intersecta el segmento uniendo x con y si $z \neq x$ y $z \neq y$.

La representación de P es llamado el diagrama de Hasse de P.

Ejemplo 6

Sea $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y la relación divide sobre P. Realizar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado P.

Elementos distinguidos

Elementos distinguidos

Definición: primer y último elemento

Sea P un conjunto ordenado. Diremos que P tiene un primer elemento si existe un $\perp \in P$ (llamado primer elemento) tal que

$$\perp \leq x, \quad \forall x \in P.$$

Elementos distinguidos

Definición: primer y último elemento

Sea P un conjunto ordenado. Diremos que P tiene un primer elemento si existe un $\perp \in P$ (llamado primer elemento) tal que

$$\perp \leq x, \quad \forall x \in P.$$

Diremos que P tiene un último elemento si existe un $\top \in P$ (llamado último elemento) tal que

$$x \leq \top, \quad \forall x \in P.$$

Elementos distinguidos

Definición: primer y último elemento

Sea P un conjunto ordenado. Diremos que P tiene un primer elemento si existe un $\perp \in P$ (llamado primer elemento) tal que

$$\perp \leq x, \quad \forall x \in P.$$

Diremos que P tiene un último elemento si existe un $\top \in P$ (llamado último elemento) tal que

$$x \leq \top, \quad \forall x \in P.$$

Ejemplo 7

- En $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, tenemos que $\perp = \emptyset$ y $\top = X$.
- $\mathbb{N}$ tiene primer elemento $\perp = 1$, pero no tiene último elemento.
- $\mathbb{Z}$ no tiene ni primer ni último elemento.

Elementos distinguidos

Definición: primer y último elemento

Sea P un conjunto ordenado. Diremos que P tiene un primer elemento si existe un $\bot \in P$ (llamado primer elemento) tal que

$$\bot \leq x, \quad \forall x \in P.$$

Diremos que P tiene un último elemento si existe un $\top \in P$ (llamado último elemento) tal que

$$x \leq \top, \quad \forall x \in P.$$

Ejemplo 7

- En $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, tenemos que $\bot = \emptyset$ y $\top = X$.
- $\mathbb{N}$ tiene primer elemento $\bot = 1$, pero no tiene último elemento.
- $\mathbb{Z}$ no tiene ni primer ni último elemento.

Elementos distinguidos

Definición: primer y último elemento

Sea P un conjunto ordenado. Diremos que P tiene un primer elemento si existe un $\perp \in P$ (llamado primer elemento) tal que

$$\perp \leq x, \quad \forall x \in P.$$

Diremos que P tiene un último elemento si existe un $\top \in P$ (llamado último elemento) tal que

$$x \leq \top, \quad \forall x \in P.$$

Ejemplo 7

- En $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, tenemos que $\perp = \emptyset$ y $\top = X$.
- $\mathbb{N}$ tiene primer elemento $\perp = 1$, pero no tiene último elemento.
- $\mathbb{Z}$ no tiene ni primer ni último elemento.

Elementos distinguidos

Definición: primer y último elemento

Sea P un conjunto ordenado. Diremos que P tiene un primer elemento si existe un $\bot \in P$ (llamado primer elemento) tal que

$$\bot \leq x, \quad \forall x \in P.$$

Diremos que P tiene un último elemento si existe un $\top \in P$ (llamado último elemento) tal que

$$x \leq \top, \quad \forall x \in P.$$

Ejemplo 7

- En $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, tenemos que $\bot = \emptyset$ y $\top = X$.
- $\mathbb{N}$ tiene primer elemento $\bot = 1$, pero no tiene último elemento.
- $\mathbb{Z}$ no tiene ni primer ni último elemento.

Elementos distinguidos

Definición: elementos mínimales y máximales

Sea P un conjunto ordenado. Sea $A \subseteq P$. Diremos que un elemento $a \in A$ es un elemento mínimal de A si

$$x \leq a \text{ y } x \in A \implies a = x$$

Elementos distinguidos

Definición: elementos mínimales y máximales

Sea P un conjunto ordenado. Sea $A \subseteq P$. Diremos que un elemento $a \in A$ es un elemento mínimal de A si

$$x \leq a \text{ y } x \in A \implies a = x$$

Diremos que un elemento $a \in A$ es un elemento máximal de A si

$$a \leq x \text{ y } x \in A \implies a = x.$$

Elementos distinguidos

Definición: elementos mínimales y máximales

Sea P un conjunto ordenado. Sea $A \subseteq P$. Diremos que un elemento $a \in A$ es un elemento mínimal de A si

$$x \leq a \text{ y } x \in A \implies a = x$$

Diremos que un elemento $a \in A$ es un elemento máximal de A si

$$a \leq x \text{ y } x \in A \implies a = x.$$

Ejemplo 8

Suma de conjuntos ordenados

Suma lineal

Suma de conjuntos ordenados

Suma lineal

Sean P y Q dos conjuntos ordenados disjuntos.

Suma de conjuntos ordenados

Suma lineal

Sean P y Q dos conjuntos ordenados disjuntos. La suma lineal $P \oplus Q$ es definida tomando la relación de orden $\leq$ sobre $P \cup Q$: para todos $x, y \in P \cup Q$,

Suma de conjuntos ordenados

Suma lineal

Sean P y Q dos conjuntos ordenados disjuntos. La suma lineal $P \oplus Q$ es definida tomando la relación de orden $\leq$ sobre $P \cup Q$: para todos $x, y \in P \cup Q$,

$$x \leq y \iff \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Suma de conjuntos ordenados

Suma lineal

Sean P y Q dos conjuntos ordenados disjuntos. La suma lineal $P \oplus Q$ es definida tomando la relación de orden $\leq$ sobre $P \cup Q$: para todos $x, y \in P \cup Q$,

$$x \leq y \iff \begin{cases} x, y \in P \;\text{ y }\; x \leq_P y \\ \\ \\ \end{cases}$$

Suma de conjuntos ordenados

Suma lineal

Sean P y Q dos conjuntos ordenados disjuntos. La suma lineal $P \oplus Q$ es definida tomando la relación de orden $\leq$ sobre $P \cup Q$: para todos $x, y \in P \cup Q$,

$$x \leq y \iff \begin{cases} x, y \in P \;\; \text{y} \;\; x \leq_P y \\ x, y \in Q \;\; \text{y} \;\; x \leq_Q y \\ \end{cases}$$

Suma de conjuntos ordenados

Suma lineal

Sean P y Q dos conjuntos ordenados disjuntos. La suma lineal $P \oplus Q$ es definida tomando la relación de orden $\leq$ sobre $P \cup Q$: para todos $x, y \in P \cup Q$,

$$x \leq y \iff \begin{cases} x, y \in P \quad \text{y} \quad x \leq_P y \\ x, y \in Q \quad \text{y} \quad x \leq_Q y \\ x \in P \quad \text{e} \quad y \in Q \end{cases}$$

Suma de conjuntos ordenados

Suma lineal

Sean P y Q dos conjuntos ordenados disjuntos. La suma lineal $P \oplus Q$ es definida tomando la relación de orden $\leq$ sobre $P \cup Q$: para todos $x, y \in P \cup Q$,

$$x \leq y \iff \begin{cases} x, y \in P \ \text{ y } \ x \leq_P y \\ x, y \in Q \ \text{ y } \ x \leq_Q y \\ x \in P \ \text{ e } \ y \in Q \end{cases}$$

El diagrama de Hasse de $P \oplus Q$ es obtenido ubicando el diagrama de P directamente debajo del diagrama de Q y añadiendo un segmento de cada elemento máximal de P a cada elemento mínimal de Q.

Producto de conjuntos ordenados

Producto de conjuntos ordenados

Definición de producto

Sean $P_1, \ldots, P_n$ conjuntos ordenados. Se define el orden $\leq$ sobre el producto cartesiano $P_1 \times \cdots \times P_n$ por:

Producto de conjuntos ordenados

Definición de producto

Sean $P_1, \ldots, P_n$ conjuntos ordenados. Se define el orden $\leq$ sobre el producto cartesiano $P_1 \times \cdots \times P_n$ por:

$$(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) \iff x_i \leq_{P_i} y_i, \ \forall i$$

Producto de conjuntos ordenados

Definición de producto

Sean $P_1, \dots, P_n$ conjuntos ordenados. Se define el orden $\leq$ sobre el producto cartesiano $P_1 \times \cdots \times P_n$ por:

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \iff x_i \leq_{P_i} y_i, \ \forall i$$

El diagrama de Hasse de un producto $P \times Q$ puede ser obtenido reemplazando cada punto del diagrama de P por una copia del diagrama de Q, y conectando los puntos correspondientes.

Producto de conjuntos ordenados

Definición de producto

Sean $P_1, \ldots, P_n$ conjuntos ordenados. Se define el orden $\leq$ sobre el producto cartesiano $P_1 \times \cdots \times P_n$ por:

$$(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) \iff x_i \leq_{P_i} y_i, \ \forall i$$

El diagrama de Hasse de un producto $P \times Q$ puede ser obtenido reemplazando cada punto del diagrama de P por una copia del diagrama de Q, y conectando los puntos correspondientes.

Proposición

Sea $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto con n elementos. Entonces los conjuntos ordenados $\mathcal{P}(X)$ y $\mathbf{2}^n$ son isomorficos.

Producto de conjuntos ordenados

Definición: orden lexicógrafico

Sean P y Q conjuntos ordenados. Definimos el orden $\leq_\ell$ (llamado orden lexicógrafico) sobre $P \times Q$ por:

Producto de conjuntos ordenados

Definición: orden lexicógrafico

Sean P y Q conjuntos ordenados. Definimos el orden $\leq_\ell$ (llamado orden lexicógrafico) sobre $P \times Q$ por:

$$(x_1, x_2) \leq_\ell (y_1, y_2) \iff x_1 < y_1 \text{ o } (x_1 = y_1 \text{ y } x_2 \leq y_2).$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado.
Un subconjunto I de P es llamado decreciente si cumple que:

Definición

Sea P un conjunto ordenado.
Un subconjunto I de P es llamado decreciente si cumple que:

$$\text{si } \; x \leq a \; \text{ y } \; a \in I \implies x \in I.$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado.
Un subconjunto I de P es llamado decreciente si cumple que:

$$\text{si} \;\; x \le a \;\; \text{y} \;\; a \in I \implies x \in I.$$

Un subconjunto F de P es llamado creciente si:

Definición

Sea P un conjunto ordenado.
Un subconjunto I de P es llamado decreciente si cumple que:

$$\text{si} \;\; x \leq a \;\; \text{y} \;\; a \in I \implies x \in I.$$

Un subconjunto F de P es llamado creciente si:

$$\text{si} \;\; a \leq x \;\; \text{y} \;\; a \in F \implies x \in F.$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado.
Un subconjunto I de P es llamado decreciente si cumple que:

$$\text{si } \ x \leq a \ \text{ y } \ a \in I \implies x \in I.$$

Un subconjunto F de P es llamado creciente si:

$$\text{si } \ a \leq x \ \text{ y } \ a \in F \implies x \in F.$$

Definición 9

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \cup \{x\} \subseteq P$. Definimos los siguientes subconjuntos.

Definición

Sea P un conjunto ordenado.
Un subconjunto I de P es llamado decreciente si cumple que:

$$\text{si} \;\; x \leq a \;\; \text{y} \;\; a \in I \implies x \in I.$$

Un subconjunto F de P es llamado creciente si:

$$\text{si} \;\; a \leq x \;\; \text{y} \;\; a \in F \implies x \in F.$$

Definición 9

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \cup \{x\} \subseteq P$. Definimos los siguientes subconjuntos.

$\downarrow A = \{y \in P : (\exists a \in A),\ y \leq a\}$

Definición

Sea P un conjunto ordenado.
Un subconjunto I de P es llamado decreciente si cumple que:

$$\text{si} \;\; x \leq a \;\; \text{y} \;\; a \in I \implies x \in I.$$

Un subconjunto F de P es llamado creciente si:

$$\text{si} \;\; a \leq x \;\; \text{y} \;\; a \in F \implies x \in F.$$

Definición 9

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \cup \{x\} \subseteq P$. Definimos los siguientes subconjuntos.

$$\downarrow A = \{y \in P : (\exists a \in A),\ y \leq a\} \qquad \text{y} \qquad \downarrow x = \{y \in P : y \leq x\}$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado.
Un subconjunto I de P es llamado decreciente si cumple que:

$$\text{si} \;\; x \leq a \;\; \text{y} \;\; a \in I \implies x \in I.$$

Un subconjunto F de P es llamado creciente si:

$$\text{si} \;\; a \leq x \;\; \text{y} \;\; a \in F \implies x \in F.$$

Definición 9

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \cup \{x\} \subseteq P$. Definimos los siguientes subconjuntos.

$$\downarrow A = \{y \in P : (\exists a \in A), \; y \leq a\} \qquad \text{y} \qquad \downarrow x = \{y \in P : y \leq x\}$$

$$\uparrow A = \{y \in P : (\exists a \in A), \; a \leq y\} \qquad \text{y} \qquad \uparrow x = \{y \in P : x \leq y\}$$

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. $\downarrow A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. $\uparrow A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = \downarrow A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = \uparrow A$.

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. $\downarrow A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. $\uparrow A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = \downarrow A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = \uparrow A$.

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. $\downarrow A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. $\uparrow A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = \downarrow A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = \uparrow A$.

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. $\downarrow A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. $\uparrow A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = \downarrow A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = \uparrow A$.

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. ${\downarrow}A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. ${\uparrow}A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = {\downarrow}A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = {\uparrow}A$.

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. ${\downarrow}A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. ${\uparrow}A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = {\downarrow}A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = {\uparrow}A$.

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Las siguientes son equivalentes:

1. $x \leq y$;
2. ${\downarrow}x \subseteq {\downarrow}y$;
3. $(\forall I \in \mathcal{O}(P)),\ y \in I \implies x \in I$.

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. $\downarrow A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. $\uparrow A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = \downarrow A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = \uparrow A$.

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Las siguientes son equivalentes:

1. $x \leq y$;
2. $\downarrow x \subseteq \downarrow y$;
3. $(\forall I \in \mathcal{O}(P)),\ y \in I \implies x \in I$.

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. $\downarrow A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. $\uparrow A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = \downarrow A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = \uparrow A$.

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Las siguientes son equivalentes:

1. $x \leq y$;
2. $\downarrow x \subseteq \downarrow y$;
3. $(\forall I \in \mathcal{O}(P)),\ y \in I \implies x \in I$.

Conjuntos decrecientes y crecientes

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Entonces

1. ${\downarrow}A$ es el menor subconjunto decreciente que contiene a A.
2. ${\uparrow}A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.
3. A es decreciente si y sólo si $A = {\downarrow}A$.
4. A es creciente si y sólo si $A = {\uparrow}A$.

Proposición

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Las siguientes son equivalentes:

1. $x \leq y$;
2. ${\downarrow}x \subseteq {\downarrow}y$;
3. $(\forall I \in \mathcal{O}(P)),\ y \in I \implies x \in I$.

Funciones entre conjuntos ordenados

Funciones entre conjuntos ordenados

Definición

Sean P y Q conjuntos ordenados. Una función $\varphi\colon P \to Q$ es llamada:

- monótona si $x \leq_P y \implies \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un embedding si $x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un isomorfismo si es un embedding y sobreyectiva.

Funciones entre conjuntos ordenados

Definición

Sean P y Q conjuntos ordenados. Una función $\varphi \colon P \to Q$ es llamada:

- monótona si $x \leq_P y \implies \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un embedding si $x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un isomorfismo si es un embedding y sobreyectiva.

Funciones entre conjuntos ordenados

Definición

Sean P y Q conjuntos ordenados. Una función $\varphi\colon P \to Q$ es llamada:

- monótona si $x \leq_P y \implies \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un embedding si $x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un isomorfismo si es un embedding y sobreyectiva.

Funciones entre conjuntos ordenados

Definición

Sean P y Q conjuntos ordenados. Una función $\varphi\colon P \to Q$ es llamada:

- monótona si $x \leq_P y \implies \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un embedding si $x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un isomorfismo si es un embedding y sobreyectiva.

Funciones entre conjuntos ordenados

Definición

Sean P y Q conjuntos ordenados. Una función $\varphi\colon P \to Q$ es llamada:

- monótona si $x \leq_P y \implies \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un embedding si $x \leq_P y \iff \varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$.
- un isomorfismo si es un embedding y sobreyectiva.

Ejemplo 10

Sea P un conjunto ordenado. Entonces la función $\varphi\colon P \to \mathcal{O}(P)$ definida por $\varphi(x) = \downarrow x$ es un embedding.

Ejercicios propuestos

Ejercicios Pag. 25

1.1 – 1.3 – 1.4 – 1.7 – 1.8 – 1.10 – 1.13 – 1.22 – 1.24.

Ejercicio 1

Sea P un conjunto ordenado y sea $A, B \subseteq P$. Probar que:

(a) $\uparrow A$ es el menor subconjunto creciente que contiene a A.

(b) A es creciente si y sólo si $A = \uparrow A$.

(c) Si $A \subseteq B$, entonces $\uparrow A \subseteq \uparrow B$.

Ejercicio 2

Sea P un conjunto ordenado y sean $x, y \in P$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $x \leq y$.
2. $\uparrow y \subseteq \uparrow x$.
3. Para todo subconjunto creciente F, $x \in F \implies y \in F$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3

Sean $\varphi\colon P \to Q$ y $\psi\colon Q \to R$ embeddings. Probar que $\psi \circ \varphi\colon P \to R$ es un embedding.