Retículos

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Naciona de La Pampa

2022

Cotas superiores e inferiores

Cotas superiores e inferiores

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$.

- Un elemento $x \in P$ es una cota superior de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.

- Un elemento $x \in P$ es una cota inferior de A si $x \leq a$ para todo $a \in A$.

Cotas superiores e inferiores

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$.

- Un elemento $x \in P$ es una cota superior de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.

- Un elemento $x \in P$ es una cota inferior de A si $x \leq a$ para todo $a \in A$.

Cotas superiores e inferiores

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$.

- Un elemento $x \in P$ es una cota superior de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.

$$A^u = \{x \in P : (\forall a \in A),\ a \leq x\}$$

- Un elemento $x \in P$ es una cota inferior de A si $x \leq a$ para todo $a \in A$.

Cotas superiores e inferiores

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$.

- Un elemento $x \in P$ es una cota superior de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.

$$A^u = \{x \in P : (\forall a \in A),\ a \leq x\}$$

- Un elemento $x \in P$ es una cota inferior de A si $x \leq a$ para todo $a \in A$.

Cotas superiores e inferiores

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$.

- Un elemento $x \in P$ es una cota superior de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.

$$A^u = \{x \in P : (\forall a \in A),\ a \leq x\}$$

- Un elemento $x \in P$ es una cota inferior de A si $x \leq a$ para todo $a \in A$.

$$A^\ell = \{x \in P : (\forall a \in A),\ x \leq a\}.$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Diremos que un elemento $x \in P$ es el:

- supremo de A si
  1. $x \in A^u$
  2. $x \leq y, \forall y \in A^u$.

$$x = \sup A$$

- ínfimo de A si
  1. $x \in A^\ell$
  2. $y \leq x, \forall y \in A^\ell$.

$$x = \inf A$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Diremos que un elemento $x \in P$ es el:

- supremo de A si
  1. $x \in A^u$
  2. $x \leq y, \forall y \in A^u$.

$$x = \sup A$$

- ínfimo de A si
  1. $x \in A^\ell$
  2. $y \leq x, \forall y \in A^\ell$.

$$x = \inf A$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Diremos que un elemento $x \in P$ es el:

- supremo de A si
  1. $x \in A^u$
  2. $x \leq y$, $\forall y \in A^u$.

$$x = \sup A$$

- ínfimo de A si
  1. $x \in A^\ell$
  2. $y \leq x$, $\forall y \in A^\ell$.

$$x = \operatorname{ínf} A$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Diremos que un elemento $x \in P$ es el:

- supremo de A si
  1. $x \in A^u$
  2. $x \leq y$, $\forall y \in A^u$.

$$x = \sup A$$

- ínfimo de A si
  1. $x \in A^\ell$
  2. $y \leq x$, $\forall y \in A^\ell$.

$$x = \text{ínf}\, A$$

Dados $x, y \in P$, denotamos, si existen, por

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \qquad \text{y} \qquad x \wedge y = \text{ínf}\{x, y\}$$

Definición

Sea P un conjunto ordenado y sea $A \subseteq P$. Diremos que un elemento $x \in P$ es el:

- supremo de A si
  1. $x \in A^u$
  2. $x \leq y$, $\forall y \in A^u$.

$$x = \sup A$$

- ínfimo de A si
  1. $x \in A^\ell$
  2. $y \leq x$, $\forall y \in A^\ell$.

$$x = \text{ínf}\, A$$

Dados $x, y \in P$, denotamos, si existen, por

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \qquad \text{y} \qquad x \wedge y = \text{ínf}\{x, y\}$$

y para $A \subseteq P$,

$$\bigvee A = \sup A \qquad \text{y} \qquad \bigwedge A = \text{ínf}\, A.$$

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo si para todos $x, y \in P$

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo si para todos $x, y \in P$

$$x \vee y \quad \text{y} \quad x \wedge y$$

existen en P.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo si para todos $x, y \in P$

$$x \vee y \quad \text{y} \quad x \wedge y$$

existen en P.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo completo si para todo $A \subseteq P$

$$\bigvee A \quad \text{y} \quad \bigwedge A$$

existen en P.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo si para todos $x, y \in P$

$$x \vee y \quad \text{y} \quad x \wedge y$$

existen en P.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo completo si para todo $A \subseteq P$

$$\bigvee A \quad \text{y} \quad \bigwedge A$$

existen en P.

Ejemplo 1

1. Sea $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y el orden $\leq_d$. Entonces $\langle P, \leq_d \rangle$ es un retículo.
2. Sea $\mathbb{N}$ con el orden usual. $\mathbb{N}$ es un retículo, pero no un retículo completo.
3. Sea X un conjunto. Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ es un retículo completo.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo si para todos $x, y \in P$

$$x \vee y \quad \text{y} \quad x \wedge y$$

existen en P.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo completo si para todo $A \subseteq P$

$$\bigvee A \quad \text{y} \quad \bigwedge A$$

existen en P.

Ejemplo 1

1. Sea $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y el orden $\leq_d$. Entonces $\langle P, \leq_d \rangle$ es un retículo.
2. Sea $\mathbb{N}$ con el orden usual. $\mathbb{N}$ es un retículo, pero no un retículo completo.
3. Sea X un conjunto. Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ es un retículo completo.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo si para todos $x, y \in P$

$$x \vee y \quad \text{y} \quad x \wedge y$$

existen en P.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo completo si para todo $A \subseteq P$

$$\bigvee A \quad \text{y} \quad \bigwedge A$$

existen en P.

Ejemplo 1

1. Sea $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y el orden $\leq_d$. Entonces $\langle P, \leq_d \rangle$ es un retículo.
2. Sea $\mathbb{N}$ con el orden usual. $\mathbb{N}$ es un retículo, pero no un retículo completo.
3. Sea X un conjunto. Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ es un retículo completo.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo si para todos $x, y \in P$

$$x \vee y \quad \text{y} \quad x \wedge y$$

existen en P.

Definición

Diremos que un conjunto ordenado P es un retículo completo si para todo $A \subseteq P$

$$\bigvee A \quad \text{y} \quad \bigwedge A$$

existen en P.

Ejemplo 1

1. Sea $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y el orden $\leq_d$. Entonces $\langle P, \leq_d \rangle$ es un retículo.
2. Sea $\mathbb{N}$ con el orden usual. $\mathbb{N}$ es un retículo, pero no un retículo completo.
3. Sea X un conjunto. Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ es un retículo completo.

Retículos

Proposición

Sea P un retículo. Entonces

- $x \leq y \iff x \vee y = y$.
- $x \leq y \iff x \wedge y = x$.
- $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
- Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.
- $a \leq b \implies a \vee c \leq b \vee v$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$.
- Si $b \leq a \leq b \vee c$, entonces $a \vee c = b \vee c$.

Retículos

Proposición

Sea P un retículo. Entonces

- $x \leq y \iff x \vee y = y.$
- $x \leq y \iff x \wedge y = x.$
- $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x.$
- Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d.$
- $a \leq b \implies a \vee c \leq b \vee v$ y $a \wedge c \leq b \wedge c.$
- Si $b \leq a \leq b \vee c$, entonces $a \vee c = b \vee c.$

Retículos

Proposición

Sea P un retículo. Entonces

- $x \leq y \iff x \vee y = y$.
- $x \leq y \iff x \wedge y = x$.
- $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
- Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.
- $a \leq b \implies a \vee c \leq b \vee v$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$.
- Si $b \leq a \leq b \vee c$, entonces $a \vee c = b \vee c$.

Retículos

Proposición

Sea P un retículo. Entonces

- $x \leq y \iff x \vee y = y$.
- $x \leq y \iff x \wedge y = x$.
- $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
- Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.
- $a \leq b \implies a \vee c \leq b \vee v$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$.
- Si $b \leq a \leq b \vee c$, entonces $a \vee c = b \vee c$.

Retículos

Proposición

Sea P un retículo. Entonces

- $x \leq y \iff x \vee y = y$.
- $x \leq y \iff x \wedge y = x$.
- $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
- Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.
- $a \leq b \implies a \vee c \leq b \vee v$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$.
- Si $b \leq a \leq b \vee c$, entonces $a \vee c = b \vee c$.

Retículos

Proposición

Sea P un retículo. Entonces

- $x \leq y \iff x \vee y = y$.
- $x \leq y \iff x \wedge y = x$.
- $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
- Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.
- $a \leq b \implies a \vee c \leq b \vee v$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$.
- Si $b \leq a \leq b \vee c$, entonces $a \vee c = b \vee c$.

Retículos

Proposición

Sea P un retículo. Entonces

- $x \leq y \iff x \vee y = y$.
- $x \leq y \iff x \wedge y = x$.
- $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$.
- Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.
- $a \leq b \implies a \vee c \leq b \vee v$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$.
- Si $b \leq a \leq b \vee c$, entonces $a \vee c = b \vee c$.

Retículos como estructuras algebraicas

Sea $\langle L, \leq \rangle$ un retículo.

Retículos como estructuras algebraicas

Sea $\langle L, \leq \rangle$ un retículo. Definimos dos operaciones binarias sobre L

$$\vee\colon L \times L \to L \qquad \text{y} \qquad \wedge\colon L \times L \to L$$

por:

Retículos como estructuras algebraicas

Sea $\langle L, \leq \rangle$ un retículo. Definimos dos operaciones binarias sobre L

$$\vee \colon L \times L \to L \qquad \text{y} \qquad \wedge \colon L \times L \to L$$

por:

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \qquad \text{y} \qquad a \wedge b = \text{ínf}\{a, b\}.$$

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Sea L un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ y $\wedge$ satisfacen las siguientes propiedades.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociativa).

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (Conmutativa).

(L3) $a \vee a = a$ (Idempotencia).

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción).

(L5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociativa).

(L6) $a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutativa).

(L7) $a \wedge a = a$ (Idempotencia).

(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción).

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Lea $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ un conjunto con dos operaciones binarias sobre L que satisfacen las propiedades (L1)–(L8) del teorema anterior. Entonces:

1. $a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.
2. Definimos $\leq$ en L por:

$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

   Entonces $\leq$ es un orden sobre L.
3. $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo en el cual

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \qquad \text{y} \qquad a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Lea $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ un conjunto con dos operaciones binarias sobre L que satisfacen las propiedades (L1)–(L8) del teorema anterior. Entonces:

1. $a \vee b = b \iff a \wedge b = a.$

2. Definimos $\leq$ en L por:

$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

   Entonces $\leq$ es un orden sobre L.

3. $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo en el cual

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \qquad \text{y} \qquad a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Lea $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ un conjunto con dos operaciones binarias sobre L que satisfacen las propiedades (L1)–(L8) del teorema anterior. Entonces:

1. $a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.
2. Definimos $\leq$ en L por:
$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$
Entonces $\leq$ es un orden sobre L.
3. $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo en el cual
$$a \vee b = \sup\{a, b\} \qquad \text{y} \qquad a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Retículos como estructuras algebraicas

Teorema

Lea $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ un conjunto con dos operaciones binarias sobre L que satisfacen las propiedades (L1)–(L8) del teorema anterior. Entonces:

1. $a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.

2. Definimos $\leq$ en L por:

   $$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

   Entonces $\leq$ es un orden sobre L.

3. $\langle L, \leq \rangle$ es un retículo en el cual

   $$a \vee b = \sup\{a, b\} \qquad \text{y} \qquad a \wedge b = \operatorname{ínf}\{a, b\}.$$

Retículos como estructuras algebraicas

Ejemplo 2

Sea $\langle \mathbb{N}, \vee, \wedge \rangle$ definido por: para todos $a, b \in \mathbb{N}$:

Retículos como estructuras algebraicas

Ejemplo 2

Sea $\langle \mathbb{N}, \vee, \wedge \rangle$ definido por: para todos $a, b \in \mathbb{N}$:

$$a \vee b = [a, b] \qquad \text{y} \qquad a \wedge b = (a, b).$$

Retículos como estructuras algebraicas

Ejemplo 2

Sea $\langle \mathbb{N}, \vee, \wedge \rangle$ definido por: para todos $a, b \in \mathbb{N}$:

$$a \vee b = [a, b] \qquad \text{y} \qquad a \wedge b = (a, b).$$

Ejemplo 3

Sea X un conjunto. Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap \rangle$ es un retículo.

Subretículos

Subretículos

Definición

Sea $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ un retículo y sea $M \subseteq L$ no vacío.

Subretículos

Definición

Sea $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ un retículo y sea $M \subseteq L$ no vacío. Entonces M es llamado un subretículo de L si

$$a, b \in M \implies a \vee b \in M \quad \text{y} \quad a \wedge b \in M.$$

Subretículos

Definición

Sea $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ un retículo y sea $M \subseteq L$ no vacío. Entonces M es llamado un subretículo de L si

$$a, b \in M \implies a \vee b \in M \quad \text{y} \quad a \wedge b \in M.$$

Ejemplo 4

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Entonces $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un subretículo de $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap \rangle$.

Subretículos

Definición

Sea $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ un retículo y sea $M \subseteq L$ no vacío. Entonces M es llamado un subretículo de L si

$$a, b \in M \implies a \vee b \in M \text{ y } a \wedge b \in M.$$

Ejemplo 4

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Entonces $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un subretículo de $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap \rangle$.

Ejemplo 5

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ es un subretículo de $\langle \mathbb{N}, \vee, \wedge \rangle$.

Productos

Definición

Sean L y K retículos. Definimos las operaciones $\vee$ y $\wedge$ sobre $L \times K$ como siguen:

$$=$$

Productos

Definición

Sean L y K retículos. Definimos las operaciones $\vee$ y $\wedge$ sobre $L \times K$ como siguen:

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) =$$

Productos

Definición

Sean L y K retículos. Definimos las operaciones $\vee$ y $\wedge$ sobre $L \times K$ como siguen:

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$$

Productos

Definición

Sean L y K retículos. Definimos las operaciones $\vee$ y $\wedge$ sobre $L \times K$ como siguen:

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$$
$$(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2).$$

Productos

Definición

Sean L y K retículos. Definimos las operaciones $\vee$ y $\wedge$ sobre $L \times K$ como siguen:

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$$
$$(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2).$$

Proposición

$L \times K$ es un retículo con las operaciones antes definidas. Además

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \iff (a_1, b_1) \leq (a_2, b_2).$$

Homomorfismos

Homomorfismos

Definición

Sean L y K retículos. Una función $f\colon L \to K$ es llamada un homomorfismo de retículos si

Homomorfismos

Definición

Sean L y K retículos. Una función $f\colon L \to K$ es llamada un homomorfismo de retículos si

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \qquad \text{y} \qquad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Homomorfismos

Definición

Sean L y K retículos. Una función $f\colon L \to K$ es llamada un homomorfismo de retículos si

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \qquad \text{y} \qquad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Diremos que f es un embedding de retículos si es además inyectiva. Diremos que f es un isomorfismo de retículos si f es además una función biyectiva.

Homomorfismos

Definición

Sean L y K retículos. Una función $f\colon L \to K$ es llamada un homomorfismo de retículos si

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \qquad \text{y} \qquad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Diremos que f es un embedding de retículos si es además inyectiva. Diremos que f es un isomorfismo de retículos si f es además una función biyectiva.

Proposición

Sean L y K retículos y $f\colon L \to K$ una función.

(i) Las siguientes son equivalentes:
   (a) f es monótona.
   (b) $f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$.
   (c) $f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$.

(ii) f es un isomorfismo de retículo si y sólo si f es un isomorfismo de orden.

Ideales y filtros

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
    1. I es decreciente;
    2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
    1. F es creciente;
    2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
  1. I es decreciente;
  2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
  1. F es creciente;
  2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
  1. I es decreciente;
  2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
  1. F es creciente;
  2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
  1. I es decreciente;
  2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
  1. F es creciente;
  2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
  1. I es decreciente;
  2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
  1. F es creciente;
  2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
  1. I es decreciente;
  2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
  1. F es creciente;
  2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
  1. I es decreciente;
  2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
  1. F es creciente;
  2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ejemplo 7

- Si $a \in L$, entonces $\downarrow a$ es un ideal y $\uparrow a$ es un filtro.
- Si L y K son retículos acotados y $f\colon L \to K$ es un $\{0,1\}$-homomorfismo, entonces $f^{-1}(0)$ es un ideal de L y $f^{-1}(1)$ es un filtro de L.

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
  1. I es decreciente;
  2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
  1. F es creciente;
  2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ejemplo 7

- Si $a \in L$, entonces $\downarrow a$ es un ideal y $\uparrow a$ es un filtro.
- Si L y K son retículos acotados y $f\colon L \to K$ es un $\{0,1\}$-homomorfismo, entonces $f^{-1}(0)$ es un ideal de L y $f^{-1}(1)$ es un filtro de L.

Ideales y filtros

Definición 6

Sea L un retículo.

- Un subconjunto no vacío I de L es llamado ideal si
  1. I es decreciente;
  2. $a, b \in I \implies a \vee b \in I$.
- Un subconjunto no vacío F de L es llamado filtro si
  1. F es creciente;
  2. $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$.

Ejemplo 7

- Si $a \in L$, entonces $\downarrow a$ es un ideal y $\uparrow a$ es un filtro.
- Si L y K son retículos acotados y $f\colon L \to K$ es un $\{0, 1\}$-homomorfismo, entonces $f^{-1}(0)$ es un ideal de L y $f^{-1}(1)$ es un filtro de L.

Ideales y filtros

Ejemplo 8

Los siguientes son ideales en $\mathcal{P}(X)$:

1. La colección de todos los subconjuntos que no contienen a un elemento fijo de X.
2. La colección de todos los subconjuntos finitos.

Ideales y filtros

Ejemplo 8

Los siguientes son ideales en $\mathcal{P}(X)$:

1. La colección de todos los subconjuntos que no contienen a un elemento fijo de X.
2. La colección de todos los subconjuntos finitos.

Ideales y filtros

Ejemplo 8

Los siguientes son ideales en $\mathcal{P}(X)$:

1. La colección de todos los subconjuntos que no contienen a un elemento fijo de X.
2. La colección de todos los subconjuntos finitos.

Ideales y filtros

Ejemplo 8

Los siguientes son ideales en $\mathcal{P}(X)$:

1. La colección de todos los subconjuntos que no contienen a un elemento fijo de X.
2. La colección de todos los subconjuntos finitos.

$$\mathrm{Id}(L) = \text{la colección de todos los ideales de } L.$$

Ideales y filtros

Ejemplo 8

Los siguientes son ideales en $\mathcal{P}(X)$:

1. La colección de todos los subconjuntos que no contienen a un elemento fijo de X.
2. La colección de todos los subconjuntos finitos.

$$\mathrm{Id}(L) = \text{la colección de todos los ideales de } L.$$

Proposición

Sea L un retículo. Sea $A \subseteq L$ no vacío. Entonces

$$\mathrm{Idg}(A) = \{x \in L : x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n,\ \text{para algunos } a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

es el menor ideal de L que contiene a A.

Proposición

Sea L un retículo con primer elemento $\perp$. Entonces $\langle \mathrm{Id}(L), \subseteq \rangle$ es un retículo completo, donde

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha = \bigcap I_\alpha \qquad \text{y} \qquad \bigvee_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha = \mathrm{Idg}\left(\bigcup I_\alpha\right).$$

Retículos completos

Recordemos que un retículo completo es un conjunto ordenado P para el cual el supremo e ínfimo de cada subconjunto de P existe.

Retículos completos

Recordemos que un retículo completo es un conjunto ordenado P para el cual el supremo e ínfimo de cada subconjunto de P existe.

Proposición

Sea L un retículo completo. Sean $A, B \subseteq L$.

1. Para todo $a \in A$, $\bigwedge A \leq a \leq \bigvee A$.
2. $x \leq \bigwedge A \iff x \leq a,\ \forall a \in A$.
3. $\bigvee A \leq x \iff a \leq x,\ \forall a \in A$.
4. $\bigvee A \leq \bigwedge B \iff a \leq b,\ \forall a \in A$ y $b \in B$.
5. Si $A \subseteq B \implies \bigvee A \leq \bigvee B$ y $\bigwedge B \leq \bigwedge A$.
6. $\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$ y $\bigwedge(A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$.

Retículos completos

Recordemos que un retículo completo es un conjunto ordenado P para el cual el supremo e ínfimo de cada subconjunto de P existe.

Proposición

Sea L un retículo completo. Sean $A, B \subseteq L$.

1. Para todo $a \in A$, $\bigwedge A \leq a \leq \bigvee A$.
2. $x \leq \bigwedge A \iff x \leq a,\ \forall a \in A$.
3. $\bigvee A \leq x \iff a \leq x,\ \forall a \in A$.
4. $\bigvee A \leq \bigwedge B \iff a \leq b,\ \forall a \in A$ y $b \in B$.
5. Si $A \subseteq B \implies \bigvee A \leq \bigvee B$ y $\bigwedge B \leq \bigwedge A$.
6. $\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$ y $\bigwedge(A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$.

Retículos completos

Recordemos que un retículo completo es un conjunto ordenado P para el cual el supremo e ínfimo de cada subconjunto de P existe.

Proposición

Sea L un retículo completo. Sean $A, B \subseteq L$.

1. Para todo $a \in A$, $\bigwedge A \leq a \leq \bigvee A$.
2. $x \leq \bigwedge A \iff x \leq a,\ \forall a \in A$.
3. $\bigvee A \leq x \iff a \leq x,\ \forall a \in A$.
4. $\bigvee A \leq \bigwedge B \iff a \leq b,\ \forall a \in A$ y $b \in B$.
5. Si $A \subseteq B \implies \bigvee A \leq \bigvee B$ y $\bigwedge B \leq \bigwedge A$.
6. $\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$ y $\bigwedge(A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$.

Retículos completos

Recordemos que un retículo completo es un conjunto ordenado P para el cual el supremo e ínfimo de cada subconjunto de P existe.

Proposición

Sea L un retículo completo. Sean $A, B \subseteq L$.

1. Para todo $a \in A$, $\bigwedge A \leq a \leq \bigvee A$.
2. $x \leq \bigwedge A \iff x \leq a,\ \forall a \in A$.
3. $\bigvee A \leq x \iff a \leq x,\ \forall a \in A$.
4. $\bigvee A \leq \bigwedge B \iff a \leq b,\ \forall a \in A$ y $b \in B$.
5. Si $A \subseteq B \implies \bigvee A \leq \bigvee B$ y $\bigwedge B \leq \bigwedge A$.
6. $\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$ y $\bigwedge(A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$.

Retículos completos

Recordemos que un retículo completo es un conjunto ordenado P para el cual el supremo e ínfimo de cada subconjunto de P existe.

Proposición

Sea L un retículo completo. Sean $A, B \subseteq L$.

1. Para todo $a \in A$, $\bigwedge A \leq a \leq \bigvee A$.
2. $x \leq \bigwedge A \iff x \leq a,\ \forall a \in A$.
3. $\bigvee A \leq x \iff a \leq x,\ \forall a \in A$.
4. $\bigvee A \leq \bigwedge B \iff a \leq b,\ \forall a \in A$ y $b \in B$.
5. Si $A \subseteq B \implies \bigvee A \leq \bigvee B$ y $\bigwedge B \leq \bigwedge A$.
6. $\bigvee (A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$ y $\bigwedge (A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$.

Retículos completos

Recordemos que un retículo completo es un conjunto ordenado P para el cual el supremo e ínfimo de cada subconjunto de P existe.

Proposición

Sea L un retículo completo. Sean $A, B \subseteq L$.

1. Para todo $a \in A$, $\bigwedge A \leq a \leq \bigvee A$.
2. $x \leq \bigwedge A \iff x \leq a, \ \forall a \in A$.
3. $\bigvee A \leq x \iff a \leq x, \ \forall a \in A$.
4. $\bigvee A \leq \bigwedge B \iff a \leq b, \ \forall a \in A$ y $b \in B$.
5. Si $A \subseteq B \implies \bigvee A \leq \bigvee B$ y $\bigwedge B \leq \bigwedge A$.
6. $\bigvee (A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$ y $\bigwedge (A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$.

Retículos completos

Recordemos que un retículo completo es un conjunto ordenado P para el cual el supremo e ínfimo de cada subconjunto de P existe.

Proposición

Sea L un retículo completo. Sean $A, B \subseteq L$.

1. Para todo $a \in A$, $\bigwedge A \leq a \leq \bigvee A$.
2. $x \leq \bigwedge A \iff x \leq a,\ \forall a \in A$.
3. $\bigvee A \leq x \iff a \leq x,\ \forall a \in A$.
4. $\bigvee A \leq \bigwedge B \iff a \leq b,\ \forall a \in A$ y $b \in B$.
5. Si $A \subseteq B \implies \bigvee A \leq \bigvee B$ y $\bigwedge B \leq \bigwedge A$.
6. $\bigvee(A \cup B) = (\bigvee A) \vee (\bigvee B)$ y $\bigwedge(A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$.

Retículos completos

Proposición

Sea P un conjunto ordenado. Las siguientes son equivalentes:

1. P es un retículo completo.
2. $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto A de P.
3. P tiene último elemento, $\top$, y $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto no vacío A de P.

Retículos completos

Proposición

Sea P un conjunto ordenado. Las siguientes son equivalentes:

1. P es un retículo completo.
2. $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto A de P.
3. P tiene último elemento, $\top$, y $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto no vacío A de P.

Retículos completos

Proposición

Sea P un conjunto ordenado. Las siguientes son equivalentes:

1. P es un retículo completo.
2. $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto A de P.
3. P tiene último elemento, $\top$, y $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto no vacío A de P.

Retículos completos

Proposición

Sea P un conjunto ordenado. Las siguientes son equivalentes:

1. P es un retículo completo.
2. $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto A de P.
3. P tiene último elemento, $\top$, y $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto no vacío A de P.

Retículos completos

Proposición

Sea P un conjunto ordenado. Las siguientes son equivalentes:

1. P es un retículo completo.
2. $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto A de P.
3. P tiene último elemento, $\top$, y $\bigwedge A$ existe en P para todo subconjunto no vacío A de P.

Teorema punto fijo de Knaster-Tarski

Sea L un retículo completo y $F\colon L \to L$ una función monótona. Entonces

$$\alpha = \bigvee \{x \in L : x \leq F(x)\}$$

es un punto fijo de F. Además α es el mayor punto fijo de F. Dualmente, F tiene un menor punto fijo.

Elementos sup-irreducibles

Elementos sup-irreducibles

Definición 9

Sea L un retículo. Un elemento $x \in L$ es llamado sup-irreducible si

1. $x \neq \perp$.
2. Si $x = a \vee b \implies x = a$ o $x = b$.

Elementos sup-irreducibles

Definición 9

Sea L un retículo. Un elemento $x \in L$ es llamado sup-irreducible si

1. $x \neq \perp$.
2. Si $x = a \vee b \implies x = a$ o $x = b$.

Elementos sup-irreducibles

Definición 9

Sea L un retículo. Un elemento $x \in L$ es llamado sup-irreducible si

1. $x \neq \perp$.
2. Si $x = a \vee b \implies x = a$ o $x = b$.

Elementos sup-irreducibles

Definición 9

Sea L un retículo. Un elemento $x \in L$ es llamado sup-irreducible si

1. $x \neq \perp$.
2. Si $x = a \vee b \implies x = a$ o $x = b$.

$\mathcal{J}(L)$ = la colección de todos los elementos sup-irredu. de L.

Ejemplo 10

- En una cadena, cada elemento no nulo es sup-irreducible.
- En un retículo finito L, un elemento x es sup-irreducible si y sólo si existe un único $a \in L$ tal que $a \prec x$.
- En el retículo $\langle \mathbb{N}_0, mcd, mcm \rangle$ un elemento no nulo x es sup-irreducible si y sólo si $x = p^s$ para algún p primo.
- En el retículo $\mathcal{P}(X)$ los elementos sup-irreducibles son exactamente los conjuntos unitarios $\{x\}$, para $x \in X$.

Elementos sup-irreducibles

Definición 9

Sea L un retículo. Un elemento $x \in L$ es llamado sup-irreducible si

1. $x \neq \perp$.
2. Si $x = a \vee b \implies x = a$ o $x = b$.

$\mathcal{J}(L)$ = la colección de todos los elementos sup-irredu. de L.

Ejemplo 10

- En una cadena, cada elemento no nulo es sup-irreducible.
- En un retículo finito L, un elemento x es sup-irreducible si y sólo si existe un único $a \in L$ tal que $a \prec x$.
- En el retículo $\langle \mathbb{N}_0, mcd, mcm \rangle$ un elemento no nulo x es sup-irreducible si y sólo si $x = p^s$ para algún p primo.
- En el retículo $\mathcal{P}(X)$ los elementos sup-irreducibles son exactamente los conjuntos unitarios $\{x\}$, para $x \in X$.

Elementos sup-irreducibles

Definición 9

Sea L un retículo. Un elemento $x \in L$ es llamado sup-irreducible si

1. $x \neq \perp$.
2. Si $x = a \vee b \implies x = a$ o $x = b$.

$\mathcal{J}(L)$ = la colección de todos los elementos sup-irredu. de L.

Ejemplo 10

- En una cadena, cada elemento no nulo es sup-irreducible.
- En un retículo finito L, un elemento x es sup-irreducible si y sólo si existe un único $a \in L$ tal que $a \prec x$.
- En el retículo $\langle \mathbb{N}_0, mcd, mcm \rangle$ un elemento no nulo x es sup-irreducible si y sólo si $x = p^s$ para algún p primo.
- En el retículo $\mathcal{P}(X)$ los elementos sup-irreducibles son exactamente los conjuntos unitarios $\{x\}$, para $x \in X$.

Elementos sup-irreducibles

Definición 9

Sea L un retículo. Un elemento $x \in L$ es llamado sup-irreducible si

1. $x \neq \perp$.
2. Si $x = a \vee b \implies x = a$ o $x = b$.

$\mathcal{J}(L)$ = la colección de todos los elementos sup-irredu. de L.

Ejemplo 10

- En una cadena, cada elemento no nulo es sup-irreducible.
- En un retículo finito L, un elemento x es sup-irreducible si y sólo si existe un único $a \in L$ tal que $a \prec x$.
- En el retículo $\langle \mathbb{N}_0, mcd, mcm \rangle$ un elemento no nulo x es sup-irreducible si y sólo si $x = p^s$ para algún p primo.
- En el retículo $\mathcal{P}(X)$ los elementos sup-irreducibles son exactamente los conjuntos unitarios $\{x\}$, para $x \in X$.

Elementos sup-irreducibles

Definición 9

Sea L un retículo. Un elemento $x \in L$ es llamado sup-irreducible si

1. $x \neq \perp$.
2. Si $x = a \vee b \implies x = a$ o $x = b$.

$\mathcal{J}(L)$ = la colección de todos los elementos sup-irredu. de L.

Ejemplo 10

- En una cadena, cada elemento no nulo es sup-irreducible.
- En un retículo finito L, un elemento x es sup-irreducible si y sólo si existe un único $a \in L$ tal que $a \prec x$.
- En el retículo $\langle \mathbb{N}_0, mcd, mcm \rangle$ un elemento no nulo x es sup-irreducible si y sólo si $x = p^s$ para algún p primo.
- En el retículo $\mathcal{P}(X)$ los elementos sup-irreducibles son exactamente los conjuntos unitarios $\{x\}$, para $x \in X$.

Elementos sup-irreducibles

Proposición

Sea L un retículo finito.

1. Para todos $a, b \in L$,

   $$a \not\leq b, \text{ entonces existe } x \in \mathcal{J}(L) \text{ tal que } x \leq a \text{ y } x \not\leq b.$$

2. $a = \bigvee\{x \in \mathcal{J}(L) : x \leq a\}, \forall a \in L$.

Elementos sup-irreducibles

Proposición

Sea L un retículo finito.

1. Para todos $a, b \in L$,

$$a \nleq b, \text{ entonces existe } x \in \mathcal{J}(L) \text{ tal que } x \leq a \text{ y } x \nleq b.$$

2. $a = \bigvee\{x \in \mathcal{J}(L) : x \leq a\}, \forall a \in L.$

Elementos sup-irreducibles

Proposición

Sea L un retículo finito.

1. Para todos $a, b \in L$,

$$a \nleq b, \text{ entonces existe } x \in \mathcal{J}(L) \text{ tal que } x \leq a \text{ y } x \nleq b.$$

2. $a = \bigvee\{x \in \mathcal{J}(L) : x \leq a\}$, $\forall a \in L$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 (Pag. 56)

2.1 – 2.2 – 2.4 – 2.5 – 2.10 – 2.13(i)-(ii) – 2.16 – 2.19 – 2.21 – 2.23 – 2.25 – 2.26

Ejercicio 2

Sea $\langle P, \leq \rangle$ un retículo. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todos $a_1, \ldots, a_{n+1} \in P$, $a_1 \vee \cdots \vee a_{n+1}$ y $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n+1}$ existen en P.

Ejercicio 3

Sea $\leq_d$ definida en $\mathbb{N}$ por: $n \leq_d m \iff n \mid m$. Probar que $\langle \mathbb{N}, \leq_d \rangle$ es un retículo.

Ejercicio 4

(a) Sea X un conjunto y sea $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Probar que si $\mathcal{L}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones arbitrarias, entonces $\langle \mathcal{L}, \subseteq \rangle$ es un retículo completo.

(b) Sea P un conjunto ordenado. Probar que $\langle \mathcal{O}(P), \subseteq \rangle$ es un retículo completo.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y sea $x \in X$. Probar que la colección

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq X : \exists U \in \tau \ \text{ tal que } \ x \in U \subseteq A\}$$

es un filtro en $\mathcal{P}(X)$.

Ejercicio 6

Sea L un retículo con primer y último elemento, $\perp$ y $\top$ respectivamente. Probar que la función $f \colon L \to \mathrm{Id}(L)$ definida por

$$f(a) = {\downarrow} a$$

es un embedding de retículos.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 7

Sea L un retículo finito. Sean $a, b \in L$. Probar que

$$a \leq b \iff \forall x \in \mathcal{J}(L), \forall y \in \mathcal{M}(L)(x \leq a \ \wedge \ b \leq y \implies x \leq y)$$