

Una introducción a la Topología General

LUCIANO J. GONZÁLEZ

2026

Copyright ©2026 Luciano J. González

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad Nacional de La Pampa

CONICET

lucianogonzalez@exactas.unlpam.edu.ar

<https://gonzalezluciano.github.io/>

Índice general

Prefacio	1
Introducción	2
1. Espacios topológicos	5
1.1. Topología	5
1.2. Subespacios	16
1.3. Conjuntos cerrados y clausura	19
1.4. Interior y Frontera	28
1.5. Funciones continuas	30
Ejercicios propuestos	37
Ejercicios extras	47
2. Espacios producto y espacios cocientes	51
2.1. La topología producto (caso finito)	51
2.2. La topología producto (caso general)	54
2.3. La topología cociente	58
Ejercicios propuestos	59
3. Espacios topológicos metrizables	63
3.1. Espacios métrizables	63
Ejercicios propuestos	71
4. Conexidad	73
4.1. Espacios conexos	73
4.2. Espacios conexos por caminos	78
4.3. Componentes	81
Ejercicios propuestos	82

5. Compacidad	87
5.1. Espacios compactos	87
5.2. El teorema de Tychonoff	93
5.3. El conjunto de Cantor	96
5.4. Espacios localmente compactos y Compactificación	100
5.5. La compactificación Stone-Čech	104
Ejercicios propuestos	105
6. Axiomas de numerabilidad y de separación	109
6.1. Axiomas de numerabilidad	109
6.2. Axiomas de separación	116
6.3. Lema de Urysohn y el teorema de extensión de Tietze	125
6.4. El teorema de metrización de Urysohn	134
Ejercicios propuestos	137
Índice alfabético	147
Bibliografía	151

Prefacio

Este manuscrito fue desarrollado para el curso de grado Espacios Topológicos, destinado a estudiantes de la carrera Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

Estas notas comienzan directamente con las definiciones formales y abstractas de topología sobre un conjunto y de espacio topológico. Los requisitos para seguir adecuadamente el texto son accesibles: se asume que el lector conoce los fundamentos de lógica (para seguir la estructura de las demostraciones) y cuenta con una base sólida en teoría intuitiva de conjuntos —no es necesaria una axiomatización formal— y cardinalidad. Aunque no es indispensable, resulta aconsejable haber cursado un módulo básico de Análisis Real y Espacios Métricos, ya que diversos ejemplos y ejercicios presuponen cierto grado de familiaridad con estas áreas. El texto incluye una sección dedicada a espacios métricos (o, más precisamente, a espacios topológicos metrizables), donde se repasan las definiciones de distancia, espacio métrico y continuidad, junto con algunas propiedades esenciales. El desarrollo no profundiza más en esta línea —ya que no resulta necesario para el propósito del apunte—, pero el lector interesado podrá consultar la bibliografía específica que allí se sugiere.

Es fundamental tener en cuenta que los ejercicios propuestos constituyen, junto con el núcleo teórico, una parte esencial de este material (y de cualquier texto de matemática). La resolución activa de los problemas brindará una comprensión más sólida de los conceptos tratados, así como la destreza necesaria para construir y redactar demostraciones formales. Cabe señalar que algunos ejemplos y actividades proponen un abordaje más intuitivo o gráfico; no obstante, se anima al lector interesado a formular también sus soluciones con rigor formal. Asimismo, varios resultados y propiedades útiles para el desarrollo fluido de estas notas se encuentran integrados directamente en las secciones de ejercitación. Por todo lo anterior, se recomienda enfáticamente no omitir su resolución, más aún considerando que muchos de los esquemas argumentativos empleados en la teoría teórica resultarán herramientas clave para resolver los problemas propuestos.

Introducción

En términos disciplinares, los espacios topológicos constituyen una generalización natural de los espacios métricos: mientras que en estos últimos el concepto principal es el de distancia (o métrica), la topología prescinde de la métrica para situar como noción principal y fundamental al concepto de conjunto abierto (o topología). Hoy en día, el concepto de topología atraviesa de manera transversal prácticamente la totalidad de la matemática moderna. Debido a su carácter de alta generalidad y abstracción, proporciona el lenguaje y el marco riguroso necesarios para explicar, justificar y demostrar diversos fenómenos en ramas tan variadas como la geometría, el análisis, el álgebra o la teoría de la probabilidad. Asimismo, los métodos y desarrollos de la topología general desempeñan un papel central en otras disciplinas científicas, como la física teórica. Desde una perspectiva conceptual amplia, la topología estudia aquellas propiedades que permanecen invariantes bajo transformaciones continuas (homeomorfismos), por lo que formaliza y extiende la noción intuitiva del “estudio de las formas”. Formalmente, la teoría de espacios topológicos se construye en base a la teoría de conjuntos y se articula a partir de un cuerpo axiomático formulado mediante operaciones de unión e intersección. Esta definición axiomática alcanza un equilibrio idóneo: es lo suficientemente abstracta para dar soporte a los múltiples espacios que se estudian en matemática (espacios de funciones, espacios métricos, geometrías euclidianas y no euclidianas, entre otros) y, al mismo tiempo, lo suficientemente sólida para preservar las propiedades estructurales esenciales de la noción de espacio.

En este marco, el manuscrito tiene como finalidad introducir al lector al estudio de los conceptos y resultados fundamentales de la topología general. De este modo, se busca proporcionar las herramientas conceptuales y el nivel de abstracción indispensables para abordar exitosamente instancias superiores de la formación profesional y académica en matemática.

Capítulo 1

Espacios topológicos

1.1. Topología

Definición 1.1

Sea X un conjunto. Una **topología** sobre X es una colección τ de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:

(ET1) $\emptyset$ y X están en τ .

(ET2) La unión de cualquier subcolección de τ está en τ .

(ET3) La intersección de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Podemos reescribir la definición anterior como:

Una **topología** sobre X es una colección τ de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:

(ET1) $\emptyset, X \in \tau$.

(ET2) Si $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

(ET3) Si $U_1, \dots, U_n \in \tau$, entonces $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

Definición 1.2

Diremos que un par $\langle X, \tau \rangle$ es un **espacio topológico** si X es un conjunto y τ es una topología sobre X .

Llamaremos a los miembros U de una topología τ **subconjuntos abiertos** (o simplemente **abiertos**) del espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$. O simplemente, si no hay riesgo de confusión, diremos que U es un abierto de X .

Observación 1.3. La condición (ET3) puede reemplazarse equivalentemente por la siguiente condición:

(ET3.1) Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.

En otras palabras, afirmamos que una colección τ de subconjuntos de un conjunto X cumple la condición (ET3) si y sólo si cumple la condición (ET3.1).

Comprobemos esto. Sea τ una colección de subconjuntos de un conjunto X .

(ET3) $\Rightarrow$ (ET3.1) Es trivial. La condición (ET3) dice que cualquier intersección finita de elementos de τ pertenece a τ , en particular la intersección de dos elementos de τ .

(ET3.1) $\Rightarrow$ (ET3) Para probar esta implicación utilizaremos inducción. Probaremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $U_1, \dots, U_n \in \tau$, entonces $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

Caso base: Para $n = 1$, es directo.

Paso inductivo: Supongamos que vale para n . Estos es, la intersección de cualquier colección de elementos de τ con n elementos pertenece a τ . Sean ahora $n + 1$ elementos de τ : $U_1, \dots, U_n, U_{n+1} \in \tau$. Por hipótesis inductiva tenemos que $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$. Ahora por la condición (ET3'), tenemos que $(U_1 \cap \dots \cap U_n) \cap U_{n+1} \in \tau$ (porque es la intersección de dos elementos de τ). Entonces, $U_1 \cap \dots \cap U_n \cap U_{n+1} \in \tau$. Con esto concluye la demostración.

En conclusión, para probar que una colección τ cumple la condición (ET3), es suficiente (de hecho acabamos de probar que es equivalente) probar la condición (ET3.1).

Ejemplo 1.4 (Dos casos extremos). Sea X un conjunto.

- La colección $\{\emptyset, X\}$ es una topología sobre X , llamada la **topología indiscreta** sobre X . Es decir, los únicos abiertos de la topología indiscreta son el $\emptyset$ y X .
- El conjunto de partes de X , $\mathcal{P}(X)$, es una topología sobre X , llamada la **topología discreta** sobre X . Denotaremos por τ_{dis} a la topología discreta sobre X . Esto es, $\tau_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X)$. Es decir, todo subconjunto de X es abierto de la topología discreta. ■

Ejemplo 1.5. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$. Sea

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}.$$

Entonces τ es una topología sobre X . En efecto:

(ET1) Por definición de τ es claro que $\emptyset, X \in \tau$.

(ET2) Como X es finito, τ es finito. Con lo cual, uniones arbitrarias son sólo uniones arbitrarias finitas. Entonces, debemos comprobar que si $U_1, \dots, U_k \in \tau$, entonces $U_1 \cup \dots \cup U_k \in \tau$. Esto es equivalente a probar que si $U, V \in \tau$, entonces $U \cup V \in \tau$. Comprobar todos los casos posibles es largo y tedioso, haremos unos pocos y lector puede comprobar el resto por simple inspección:

- $\{a\}, \{b\} \in \tau \implies \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \in \tau$;
- $\{b\}, \{a, c\} \in \tau \implies \{b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} \in \tau$;
- $\{a, b\}, \{b, d\} \in \tau \implies \{a, b\} \cup \{b, d\} = \{a, b, d\} \in \tau$.

(ET3.1) Debemos probar que si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$. Haremos sólo un par de casos y el resto lo puede comprobar el lector por simple inspección:

- $\{b, d\}, \{a, b, c\} \in \tau \implies \{b, d\} \cap \{a, b, c\} = \{b\} \in \tau$;
- $\{a, b, c\}, \{a, b, d\} \in \tau \implies \{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\} \in \tau$;

Por lo tanto, τ es una topología sobre X . ■

Ejemplo 1.6. Sea X un conjunto infinito. Sea

$$\tau_{\text{cof}} = \{U \subseteq X : U^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Entonces τ_{cof} es una topología sobre X llamada la **topología cofinita** sobre X . En efecto:

(ET1) Por definición de τ , $\emptyset \in \tau$. Como $X^c = \emptyset$ es finito, entonces $X \in \tau$.

(ET2) Sea $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$. Si $U_i = \emptyset$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \in \tau$. Supongamos que existe $j \in I$ tal que $U_j \neq \emptyset$. Como $U_j \in \tau_{\text{cof}}$, entonces U_j^c es finito. Ahora

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} U_i^c \subseteq U_j^c.$$

Entonces $\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^c$ es finito. Con lo cual, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

(ET3.1) Sean $U, V \in \tau$. Si $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$, entonces $U \cap V = \emptyset \in \tau$. Supongamos que U y V son no vacíos. Entonces U^c y V^c son finitos. Luego $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ es finito (por ser unión finita de conjuntos finitos). Entonces $U \cap V \in \tau$.

Por lo tanto, τ_{cof} es efectivamente una topología sobre X . ■

Ejemplo 1.7. Sea $\tau_{rd} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Probemos que τ_{rd} es una topología sobre $\mathbb{R}$, llamada la **topología del rayo derecho**.

(ET1) Por definición $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau_{rd}$.

(ET2) Sea $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau_{rd}$. Si existe un índice $j \in I$ tal que $U_j = \mathbb{R}$, entonces tenemos que $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{R} \in \tau_{rd}$. Ahora supongamos que $U_i \neq \mathbb{R}$ para todo $i \in I$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$ ¹. Así, para cada $i \in I$ tenemos que $U_i \neq \emptyset, \mathbb{R}$. Luego, para cada $i \in I$, sea $a_i \in \mathbb{R}$ tal que $U_i = (a_i, \infty)$. Sea $A = \{a_i : i \in I\}$. Vamos a considerar dos casos: (1) A está acotado inferiormente; y (2) A no está acotado inferiormente.

Caso (1): A está acotado inferiormente. Entonces por el axioma de completitud de los números reales, sabemos que A tiene un ínfimo. Digamos $a = \inf A$. Probemos que $\bigcup_{i \in I} U_i = (a, \infty)$. Para esto debemos usar las propiedades de ínfimo. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Entonces existe $j \in I$ tal que $x \in U_j = (a_j, \infty)$. Luego, $a \leq a_j < x$. Entonces $x \in (a, \infty)$. Por lo tanto $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq (a, \infty)$. Sea ahora $x \in (a, \infty)$. Así $a < x$. Como $a = \inf A$, tenemos por definición que a es la mayor de las cotas inferiores de A . Entonces, como $a < x$, x no puede ser cota inferior de A . Entonces debe existir un $a_j \in A$ tal $x \not\leq a_j$. Esto es, $a_j < x$. Luego, existe $j \in I$ tal que $a_j < x$, es decir, $x \in (a_j, \infty) = U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Entonces $(a, \infty) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Por lo tanto, $\bigcup_{i \in I} U_i = (a, \infty) \in \tau_{rd}$.

Caso (2): A no está acotado inferiormente. Vamos a probar que $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. Como A no está acotado inferiormente, x no es cota inferior de A . Entonces, existe un $a_j \in A$ tal que $x \not\leq a_j$. Es decir, $a_j < x$. Entonces, $x \in (a_j, \infty) = U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Por lo tanto, $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{R} \in \tau_{rd}$.

(ET3) Sean $U, V \in \tau_{rd}$. Si $U, V \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, entonces es claro que en cualquier de los cuatro casos posibles se tiene que $U \cap V \in \{\emptyset, \mathbb{R}\} \subseteq \tau_{rd}$. Supongamos que $U = (a, \infty)$ y $V = (b, \infty)$. Si $a \leq b$, entonces $(b, \infty) \subseteq (a, \infty)$. Entonces $U \cap V = (a, \infty) \cap (b, \infty) = (b, \infty) \in \tau_{rd}$.

Por lo tanto, podemos concluir que efectivamente τ_{rd} es una topología sobre $\mathbb{R}$. ■

En muchas situaciones a lo largo del apunte deberemos probar que un subconjunto A de un conjunto X es un abierto de una topología τ . Para ello tenemos la siguiente herramienta que nos será de mucha utilidad.

¹Sea $J := \{i \in I : U_i = \emptyset\}$. Entonces $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I-J} U_i$, donde $U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I - J$.

Proposición 1.8

Sea X un conjunto y sea τ una topología sobre X . Sea $A \subseteq X$. Entonces, A es abierto de X (esto es, $A \in \tau$) si y sólo si para cada $x \in A$, existe un $U_x \in \tau$ tal que $x \in U_x \subseteq A$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Es trivial. En efecto, si A es abierto y $x \in A$, entonces existe el mismo abierto A tal que $x \in A \subseteq A$.

$(\Leftarrow)$ Por hipótesis, para cada $x \in A$, existe un abierto U_x tal que $x \in U_x \subseteq A$. Veamos que $A = \bigcup_{x \in A} U_x$. Sea $x_0 \in A$. Por definición $x_0 \in U_{x_0}$, entonces $x_0 \in \bigcup_{x \in A} U_x$. Entonces $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$. Ahora, por otro lado, para cada $x \in A$, tenemos que $U_x \subseteq A$. Entonces $\bigcup_{x \in A} U_x \subseteq A$. ■

Como podemos observar de los ejemplos anteriores, sobre un mismo conjunto X podemos tener definidas diferentes topologías. En muchos caso queremos comparar, si es posible, estas topologías.

Definición 1.9

Sea X un conjunto. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X . Diremos que τ_2 es **más fina** que τ_1 (o que τ_1 es **más gruesa** que τ_2) si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Decimos que una topología τ_2 es más fina que τ_1 si contiene a todos los abiertos de esta última ($\tau_1 \subseteq \tau_2$). Al disponer de “más abiertos” (en el sentido de inclusión), la topología más fina nos otorga una mayor resolución: nos permite discernir con mayor detalle las propiedades del espacio y la separación entre sus puntos. Como consecuencia directa, para cualquier conjunto X :

- La topología discreta (donde todo subconjunto es abierto) es la más fina posible.
- La topología indiscreta (donde solo $\emptyset$ y X son abiertos) es la más gruesa posible.

Sea X un espacio topológico. Sea $x \in X$. Diremos que U es un **entorno** de x si U es un abierto de X y $x \in U$.

Definición 1.10

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Diremos que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos de X es una **base** para la topología τ si se cumple que:

para todo $U \in \tau$ y $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.

En otras palabras:

Diremos que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es una **base** para la topología τ si $\mathcal{B} \subseteq \tau$ y para todo $x \in X$ y todo entorno U de x , existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.

Llamaremos a los miembros de una base $\mathcal{B}$ **abiertos básicos**.

Proposición 1.11

Sea τ una topología sobre un conjunto X . Sea $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) $\mathcal{B}$ es una base para τ .
- (2) Para cada abierto $U \in \tau$, existe una subcolección $\{B_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base para τ y sea $U \in \tau$. Para cada $x \in U$, existe (por definición de base) un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Comprobemos que $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. Sea $y \in U$, entonces $y \in B_y$. Luego $y \in \bigcup_{x \in U} B_x$. Ahora si $z \in \bigcup_{x \in U} B_x$, entonces existe $x \in U$ tal que $z \in B_x$. Por definición de B_x tenemos que $B_x \subseteq U$. Entonces $z \in U$. Por lo tanto, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que se cumple la condición (2) y probemos que $\mathcal{B}$ es una base para τ . Sea $U \in \tau$ y $x \in U$. Por (2), existe una subcolección $\{B_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Como $x \in U$, existe un $i_0 \in I$ tal que $x \in B_{i_0}$. Como $i_0 \in I$, tenemos que $B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = U$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para τ . ■

En general, los conjuntos en una base de una topología son más *simples* que los conjuntos abiertos arbitrarios de la topología. Por eso a menudo es más conveniente trabajar con los abiertos básicos que con los abiertos arbitrarios de la topología.

Ejemplo 1.12. Sea X un conjunto. Sea τ_{dis} la topología discreta sobre X . Esto es, $\tau_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X)$. Entonces la colección $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base para τ_{dis} . En efecto, para cada $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{P}(X) = \tau_{\text{dis}}$. Ahora, a cada $U \in \tau_{\text{dis}}$ no vacío lo podemos escribir como $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$. Entonces, por la Proposición 1.11, $\mathcal{B}$ es una base para τ_{dis} . ■

Una de las cosas importantes de contar con una base para una topología, es que en muchas situaciones, para probar que una propiedad se verifica para todo abierto de la topo-

logía, es suficiente probar la propiedad para los abiertos básicos.

Proposición 1.13

Sea τ una topología sobre un conjunto X . Sea $\mathcal{B}$ una base de τ . Sea $U \subseteq X$. Entonces U es abierto si y sólo si para cada $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.7. ■

Proposición 1.14

Sea X un conjunto y sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X . Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases para τ_1 y τ_2 , respectivamente. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) τ_2 es más fina que τ_1 ($\tau_1 \subseteq \tau_2$).
- (2) Para cada $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y cada $x \in B_1$, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Sea $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $x \in B_1$. Como $B_1 \in \mathcal{B}_1 \subseteq \tau_1$, tenemos que $B_1 \in \tau_2$. Como $\mathcal{B}_2$ es base de τ_2 , existe un $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que se cumple la condición (2). Sea $U \in \tau_1$. Debemos probar que U es abierto de τ_2 . Como $\mathcal{B}_2$ es base de τ_2 , podemos usar la Proposición 1.13 para probar que $U \in \tau_2$. Sea $x \in U$. Como U es abierto de τ_1 y $\mathcal{B}_1$ es base de τ_1 , entonces existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B_1 \subseteq U$. Por (2), existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1 \subseteq U$. Es decir, probamos que para cada $x \in U$ existe un $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq U$. Por lo tanto, por la Proposición 1.13, concluimos que U es abierto de τ_2 . ■

Definición 1.15

Sea X un conjunto y τ una topología sobre X . Diremos que una colección $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X es una **subbase** de τ si $\mathcal{S} \subseteq \tau$, y para cada $U \in \tau$ y cada $x \in U$, existen un $n \in \mathbb{N}$ y $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U$.

Proposición 1.16

Sea X un conjunto y τ una topología sobre X . Sea $\mathcal{S}$ una subbase de τ . Entonces la colección

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{S_1 \cap \dots \cap S_n : n \in \mathbb{N} \text{ y } S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}\}$$

es una base de τ , y la llamaremos la **base generada por la subbase $\mathcal{S}$** .

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.20. ■

Observación 1.17. Sea τ una topología sobre un conjunto X . Notemos que por la definición de base y la Proposición 1.16, una familia $\mathcal{S}$ de abiertos de X es una subbase para τ si y sólo si la colección $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ es una base de τ .

Ejemplo 1.18. Sea τ_{cof} la topología cofinita sobre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Comprobemos que la colección $\mathcal{S} = \{\mathbb{N} - \{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ es una subbase para τ_{cof} . Primero observemos que $\mathcal{S} \subseteq \tau_{\text{cof}}$. Ahora, sea $U \in \tau_{\text{cof}}$ y $n \in U$. Como U es abierto y $U \neq \emptyset$, entonces U^c es finito. Esto es, $U^c = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \mathbb{N}$. Es decir, $U = \mathbb{N} - \{i_1, \dots, i_k\}$. Como $n \in U$, tenemos que $n \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Ahora, tomando $S_1 = \mathbb{N} - \{i_1\}, \dots, S_k = \mathbb{N} - \{i_k\}$ que pertenecen a la colección $\mathcal{S}$, tenemos que

$$n \in S_1 \cap \dots \cap S_k = (\mathbb{N} - \{i_1\}) \cap \dots \cap (\mathbb{N} - \{i_k\}) = \mathbb{N} - \{i_1, \dots, i_k\} = U. \quad \blacksquare$$

Ahora veremos dos formas de construir topologías.

Proposición 1.19

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

(B1) Para cada $x \in X$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

(B2) Para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Entonces la colección

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq U\}$$

es una topología sobre X . Además, $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\tau_{\mathcal{B}}$.

Demostración. (ET1) Si $\emptyset \notin \tau_{\mathcal{B}}$, entonces existe $x \in \emptyset$ que no cumple la condición. Pero $x \in \emptyset$ es absurdo. Entonces, $\emptyset \in \tau_{\mathcal{B}}$. La condición (B1) implica que $X \in \tau_{\mathcal{B}}$.

(ET2) Sea $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. Debemos probar que $\bigcup U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$. Sea $x \in \bigcup U_i$. Entonces, existe un índice $j \in I$ tal que $x \in U_j$. Como $U_j \in \tau_{\mathcal{B}}$ y $x \in U_j$, entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U_j$. Como $U_j \subseteq \bigcup U_i$. Tenemos que $x \in B \subseteq \bigcup U_i$. Por lo tanto, $\bigcup U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$.

(ET3.1) Sean $U, V \in \tau_{\mathcal{B}}$. Sea $x \in U \cap V$. Es decir, $x \in U$ y $x \in V$. Entonces, por definición de $\tau_{\mathcal{B}}$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_1 \subseteq U$ y $x \in B_2 \subseteq V$. Ahora, como $x \in B_1 \cap B_2$,

tenemos por la condición (B2) que existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Entonces, $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$. Por lo tanto, $U \cap V \in \tau_{\mathcal{B}}$. ■

Proposición 1.20

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones (B1) y (B2). Entonces

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ U \subseteq X : \exists \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } U = \bigcup \mathcal{B}_0 \right\}.$$

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.14. ■

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X . Diremos que $\mathcal{B}$ es una **base para una topología** sobre X si $\mathcal{B}$ satisface las condiciones (B1) y (B2). Llamaremos a la topología $\tau_{\mathcal{B}}$ la **topología generada por la base $\mathcal{B}$** .

Ejemplo 1.21. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales. Vamos a construir sobre $\mathbb{R}$ tres topologías distintas. Cada uno de estos espacios nos serán de utilidad a lo largo del apunte para ejemplificar diversos conceptos.

(1) Sea $\mathcal{B}_u$ la colección de todos los intervalos abiertos acotados de $\mathbb{R}$. Esto es,

$$\mathcal{B}_u = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}.$$

Comprobemos que $\mathcal{B}_u$ cumple las condiciones (B1) y (B2) de la Proposición 1.19.

(B1) Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces, existe $(x - 1, x + 1) \in \mathcal{B}_u$ tal que $x \in (x - 1, x + 1)$.

(B2) Sean $B_1 = (a_1, b_1)$ y $B_2 = (a_2, b_2)$ en $\mathcal{B}_u$. Sea $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$. El lector puede comprobar que la intersección de dos intervalos abiertos acotados cualesquiera es vacía o es otro intervalo. Entonces como $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \neq \emptyset$ (pues el x pertenece a ambos), tenemos que $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (a_3, b_3) \in \mathcal{B}_u$, y $x \in (a_3, b_3) = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$.

Por lo tanto, por la Proposición 1.19, la colección

$$\tau_{\mathcal{B}_u} = \{U \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in U, \exists (a, b) \in \mathcal{B}_u \text{ tal que } x \in (a, b) \subseteq U\},$$

es una topología sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{B}_u$ es una base para ella. Llamaremos a esta topología la **topología usual sobre $\mathbb{R}$** , y denotaremos por $\mathbb{R}_u$ al espacio topológico $\langle \mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}_u} \rangle$.

(2) Sea $\mathcal{B}_s$ la siguiente colección de intervalos:

$$\mathcal{B}_s = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}.$$

Similar al punto anterior, se puede comprobar que la colección $\mathcal{B}_S$ satisface las condiciones (B1) y (B2). Por lo tanto, por la Proposición 1.19, la colección

$$\tau_{\mathcal{B}_S} = \{U \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in U, \exists [a, b) \in \mathcal{B}_S \text{ tal que } x \in [a, b) \subseteq U\},$$

es una topología sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{B}_S$ es una base para ella. Esta topología es conocida como la **recta Sorgenfrey**. Denotaremos por $\mathbb{R}_S$ al espacio topológico $\langle \mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}_S} \rangle$.

(3) Sea $K = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Sea $\mathcal{B}_K$ la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}_K = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\} \cup \{(a, b) - K : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}.$$

Es decir, $\mathcal{B}_K$ está formada por todos los intervalos abiertos acotados y todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$. Comprobemos que $\mathcal{B}_K$ cumple las condiciones (B1) y (B2).

(B1) Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces, existe $(x - 1, x + 1) \in \mathcal{B}_K$ tal que $x \in (x - 1, x + 1)$.

(B2) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_K$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$. Tenemos que analizar tres casos.

Caso (i): Si $B_1 = (a_1, b_1)$ y $B_2 = (a_2, b_2)$, entonces sabemos que $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (a_3, b_3)$.

Caso (ii): Si $B_1 = (a_1, b_1)$ y $B_2 = (a_2, b_2) - K$. Entonces

$$x \in (a_1, b_1) \cap [(a_2, b_2) - K] = [(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)] - K = (a_3, b_3) - K \in \mathcal{B}_K.$$

Caso (iii): $B_1 = (a_1, b_1) - K$ y $B_2 = (a_2, b_2) - K$. Similar al caso anterior:

$$x \in [(a_1, b_1) - K] \cap [(a_2, b_2) - K] = [(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)] - K = (a_3, b_3) - K \in \mathcal{B}_K.$$

Por lo tanto, se cumple (B2). Con lo cual, por la Proposición 1.19, la familia

$$\tau_{\mathcal{B}_K} = \{U \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}_K \text{ tal que } x \in B \subseteq U\},$$

es una topología sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{B}_K$ es una base para ella. Denotaremos por $\mathbb{R}_K$ al espacio topológico $\langle \mathbb{R}, \tau_{\mathcal{B}_K} \rangle$. ■

Proposición 1.22

Consideremos las tres topologías $\tau_{\mathcal{B}_u}$, $\tau_{\mathcal{B}_S}$ y $\tau_{\mathcal{B}_K}$ sobre $\mathbb{R}$ definidas en el ejemplo anterior. Entonces tenemos las siguientes comparaciones entre ellas:

$$\tau_{\mathcal{B}_u} \subset \tau_{\mathcal{B}_S}, \quad \tau_{\mathcal{B}_u} \subset \tau_{\mathcal{B}_K}, \quad \tau_{\mathcal{B}_S} \parallel \tau_{\mathcal{B}_K}.$$

Es decir, que $\tau_{\mathcal{B}_S}$ y $\tau_{\mathcal{B}_K}$ son propiamente más finas que $\tau_{\mathcal{B}_u}$, y $\tau_{\mathcal{B}_S}$ y $\tau_{\mathcal{B}_K}$ son incomparables.

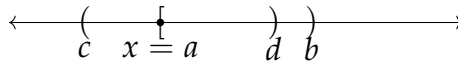


Figura 1.1

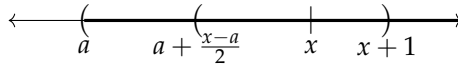


Figura 1.2

Demostración. Probaremos sólo $\tau_{\mathcal{B}_u} \subset \tau_{\mathcal{B}_S}$, el resto queda a cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.12.

Para probar que $\tau_{\mathcal{B}_u} \subset \tau_{\mathcal{B}_S}$, tenemos que probar dos cosas: uno que $\tau_{\mathcal{B}_u}$ está incluida en $\tau_{\mathcal{B}_S}$, y segundo que $\tau_{\mathcal{B}_S}$ no está incluida en $\tau_{\mathcal{B}_u}$. Para probar que $\tau_{\mathcal{B}_u} \subseteq \tau_{\mathcal{B}_S}$ usamos la Proposición 1.14, ya que ambas topologías tienen bases. Sea $(a, b) \in \mathcal{B}_u$ y sea $x \in (a, b)$. Entonces, existe $[x, b) \in \mathcal{B}_S$ tal que $x \in [x, b) \subseteq (a, b)$. Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{B}_u} \subseteq \tau_{\mathcal{B}_S}$. Ahora probemos que $\tau_{\mathcal{B}_S} \not\subseteq \tau_{\mathcal{B}_u}$. Sea $[a, b) \in \mathcal{B}_S$, el cual es un abierto de $\mathbb{R}_S$. Esto es $[a, b) \in \tau_{\mathcal{B}_S}$. Pero $[a, b)$ no es un abierto de $\mathbb{R}_u$, es decir, $[a, b) \notin \tau_{\mathcal{B}_u}$. Para probar esto usaremos la Proposición 1.13. Existe $x = a \in [a, b)$ tal que para todo intervalo (c, d) tal que $x = a \in (c, d)$ se tiene que $(c, d) \not\subseteq [a, b)$, véase la Figura 1.1. Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{B}_u} \subset \tau_{\mathcal{B}_S}$. ■

Ejemplo 1.23. ■ Los intervalos $(-\infty, b)$ y (a, ∞) son abiertos de $\mathbb{R}_u$. Veamos que (a, ∞) es abierto. Para ello usamos la Proposición 1.13. Sea $x \in (a, \infty)$. Entonces, existe $(a + \frac{x-a}{2}, x+1) \in \mathcal{B}_u$ tal que $x \in (a + \frac{x-a}{2}, x+1) \subseteq (a, \infty)$, ver la Figura 1.2. Análogamente para el intervalo $(-\infty, b)$.

- Los subconjuntos $[a, b)$ y $\mathbb{Q}$ son ejemplos de subconjuntos que no son abiertos de $\mathbb{R}_u$. Veamos que $\mathbb{Q}$ no es abierto de $\mathbb{R}_u$. Existe, por ejemplo, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ tal que para todo intervalo (a, b) que contiene a $\frac{1}{2}$ se tiene que $(a, b) \not\subseteq \mathbb{Q}$. Esto se debe a la densidad de los irracionales en $\mathbb{R}$. ■

Proposición 1.24

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de X . Entonces la colección

$$\tau_{\mathcal{S}} = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists n \in \mathbb{N} \text{ y } \exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U\} \cup \{X\}$$

es una topología sobre X . Además, $\mathcal{S}$ es una subbase para $\tau_{\mathcal{S}}$.

Demostración. Probemos que $\tau_{\mathcal{S}}$ cumple los tres axiomas para ser una topología.

(ET1) Por definición $X \in \tau_S$. También $\emptyset \in \tau_S$. Pues, si $\emptyset \notin \tau_S$, entonces existe un $x \in \emptyset$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, y todo $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ se tiene que $x \notin S_1 \cap \dots \cap S_n$ or $S_1 \cap \dots \cap S_n \not\subseteq \emptyset$. Pero la afirmación ¡¡existe un $x \in \emptyset$!! es absurda.

(ET2) Sea $\{U_\alpha : \alpha \in \Gamma\} \subseteq \tau_S$. Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$. Entonces existe un $\beta \in \Gamma$ tal que $x \in U_\beta$. Como $x \in U_\beta$ y $U_\beta \in \tau_S$, entonces por definición de τ_S existe un $n \in \mathbb{N}$ y existen $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U_\beta$. Ahora, como $U_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$, tenemos que $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$. Por lo tanto $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha \in \tau_S$.

(ET3) Sean $U, V \in \tau_S$. Sea $x \in U \cap V$. Luego $x \in U$ y $x \in V$. Como $U \in \tau_S$, $\exists n \in \mathbb{N}$ y $\exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U$. Análogamente, como $V \in \tau_S$ y $x \in V$, existe $k \in \mathbb{N}$ y $\exists R_1, \dots, R_k \in \mathcal{S}$ tal que $x \in R_1 \cap \dots \cap R_k \subseteq V$. Entonces, existe $n+k \in \mathbb{N}$ y existen $S_1, \dots, S_n, R_1, \dots, R_k \in \mathcal{S}$ tal que

$$x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \cap R_1 \cap \dots \cap R_k \subseteq U \cap V.$$

Por lo tanto, $U \cap V \in \tau_S$. ■

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de X . Llamaremos a la topología τ_S sobre X la **topología generada por la subbase $\mathcal{S}$** .

1.2. Subespacios

Hay una forma natural de obtener una nueva topología a partir de una dada y un subconjunto cualquiera del espacio. El nuevo espacio es llamado subespacio del espacio original.

Proposición 1.25

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Sea $Y \subseteq X$. Entonces la familia

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y .

Demostración. Comprobemos los tres axiomas de topología.

(ET1) Como $\emptyset, X \in \tau$ (pues, τ es una topología sobre X), entonces por definición de τ_Y tenemos que $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \tau_Y$ y $Y = X \cap Y \in \tau_Y$.

(ET2) Sea $\{V_\alpha : \alpha \in \Gamma\} \subseteq \tau_Y$. Entonces, para cada $\alpha \in \Gamma$, existe un $U_\alpha \in \tau$ tal que

$V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Ahora

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (U_\alpha \cap Y) = \underbrace{\left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha \right)}_{\in \tau} \cap Y \in \tau_Y.$$

(ET3) Sean $V_1, V_2 \in \tau_Y$. Por definición de τ_Y , existen $U_1, U_2 \in \tau$ tal que $V_1 = U_1 \cap Y$ y $V_2 = U_2 \cap Y$. Entonces

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \underbrace{U_1 \cap U_2}_{\in \tau} \cap Y \in \tau_Y.$$

Por lo tanto, τ_Y es una topología sobre Y . ■

Por la proposición anterior podemos presentar la siguiente definición.

Definición 1.26

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. La **topología subespacio** sobre Y es definida por $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$, y $\langle Y, \tau_Y \rangle$ es llamado **subespacio** de $\langle X, \tau \rangle$.

Sea X un espacio topológico e $Y \subseteq X$. Sea $V \subseteq Y$. Entonces:

V es un abierto del subespacio Y si y sólo si existe un abierto U de X tal que

$$V = U \cap Y.$$

Ejemplo 1.27. Consideremos el espacio $\mathbb{R}_u$. Entonces el subespacio $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}_u$ es el discreto. Es decir, la topología subespacio sobre $\mathbb{N}$ es la discreta. En efecto, veamos que cada conjunto unipuntual $\{n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, es abierto del subespacio $\mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces el intervalo abierto $(n-1, n+1)$ es abierto de $\mathbb{R}_u$. Entonces $(n-1, n+1) \cap \mathbb{N}$ es un abierto del subespacio $\mathbb{N}$, pero $(n-1, n+1) \cap \mathbb{N} = \{n\}$. Por lo tanto, $\{n\}$ es abierto del subespacio $\mathbb{N}$.

Proposición 1.28

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de X . Sea $Y \subseteq X$ un subespacio de X . Entonces la colección $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base para el espacio Y .

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.26. ■

Ejemplo 1.29. Consideremos el espacio $\mathbb{R}_u$. Sea $Y = [0, 1]$. Entonces el subespacio $[0, 1]$ del espacio $\mathbb{R}_u$ tiene a $\mathcal{B}_Y = \{(a, b) \cap [0, 1] : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}$ como una base. Describimos a los

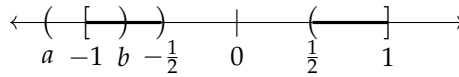


Figura 1.3: El conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$

abiertos básicos del subespacio $[0, 1]$:

$$(a, b) \cap [0, 1] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } b \leq 0 \text{ o } a \geq 1 \\ [0, b) & \text{si } a < 0 \text{ y } 0 < b \leq 1 \\ (a, b) & \text{si } 0 \leq a < b \leq 1 \\ (a, 1] & \text{si } 0 \leq a < 1 \text{ y } b > 1. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Cuando trabajemos con un espacio y un subespacio suyo, es importante indicar dónde un subconjunto $V \subseteq Y$ es abierto: es abierto de X o es abierto de Y . Como el ejemplo siguiente mostrará, puede suceder que un $V \subseteq Y$ puede ser abierto de Y pero no de X . La recíproca si es verdad: si $V \subseteq Y$ es abierto del espacio X , entonces V es también abierto de Y (comprobarlo!).

Ejemplo 1.30. Consideremos el subespacio $Y = [-1, 1]$ del espacio $\mathbb{R}_u$. Para analizar si un subconjunto de Y es abierto o no, es importante tener una descripción de los abiertos básicos de Y . Por definición, tenemos que $\mathcal{B}_Y = \{(a, b) \cap [-1, 1] : a < b\}$ es una base del subespacio Y . Entonces, los abiertos básicos de Y son de la forma:

$$(a, b) \cap [-1, 1] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } b \leq -1 \text{ o } a \geq 1 \\ [-1, b) & \text{si } a < -1 \text{ y } -1 < b \leq 1 \\ (a, b) & \text{si } -1 \leq a < b \leq 1 \\ (a, 1] & \text{si } -1 \leq a < 1 \text{ y } b > 1. \end{cases}$$

- El conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$ es abierto de Y pero no de $\mathbb{R}_u$. Veamos primero que V es abierto de Y . Notemos que $V = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Así, vemos que V es la unión de los abiertos básicos $[-1, -\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ de Y . Entonces, V es abierto de Y . Ahora veamos que V no es abierto de $\mathbb{R}_u$. Sea $x = -1 \in V$. Entonces, para cada intervalo abierto (a, b) (abierto básico de $\mathbb{R}_u$) tal que $-1 \in (a, b)$, se tiene que $(a, b) \not\subseteq V$, véase la Figura 1.3.
- El conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\} = (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1)$ no es un abierto del subespacio Y (y por lo tanto, tampoco es abierto del espacio $\mathbb{R}_u$). Supongamos

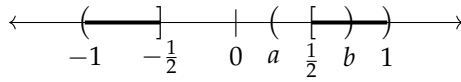


Figura 1.4: El conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\} = \left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$

que C es abierto. Entonces para todo $x \in C$, existe un abierto básico de Y , digamos $B = (a, b) \cap [-1, 1]$, tal que $x \in B \subseteq C$. Como $\frac{1}{2} \in C$, existe un intervalo abierto (a, b) tal que $\frac{1}{2} \in (a, b) \cap [-1, 1] \subseteq C$. Así $a < \frac{1}{2} < b$. Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $a < y < \frac{1}{2} < b$ e $y > 0$, véase la Figura 1.4. Entonces, $y \in B = (a, b) \cap [-1, 1]$ e $y \notin C$. Lo cual es absurdo. Por lo tanto, C no es abierto de Y .

1.3. Conjuntos cerrados y clausura

Definición 1.31

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es llamado **cerrado** de X si A^c es un abierto del espacio X .

Ejemplo 1.32. Los intervalos cerrados $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ son cerrados del espacio $\mathbb{R}_u$. En efecto, $[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ es un abierto de $\mathbb{R}_u$, porque los conjuntos $(-\infty, a)$ y (b, ∞) son abiertos de $\mathbb{R}_u$. ■

Ejemplo 1.33. Los intervalos semi-abiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ no son ni abiertos ni cerrados de $\mathbb{R}_u$. Ya sabemos que $[a, b)$ no es abierto de $\mathbb{R}_u$. Ahora $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$. Entonces $[a, b)^c$ no es abierto de $\mathbb{R}_u$ (comprobarlo!), es decir, $[a, b)$ no es cerrado de $\mathbb{R}_u$. ■

Ejemplo 1.34. Consideremos el subespacio $Y = [0, 1] \cup (2, 3)$ del espacio $\mathbb{R}_u$. Entonces los conjuntos $[0, 1]$ y $(2, 3)$ son abiertos de Y . En efecto, $[0, 1] = (-1, \frac{3}{2}) \cap Y$ y $(2, 3) = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}) \cap Y$. Notemos que $Y - [0, 1] = (2, 3)$ y $Y - (2, 3) = [0, 1]$. Entonces $[0, 1]$ y $(2, 3)$ son cerrados de Y . ■

Ejemplo 1.35. Sea X un conjunto con la topología cofinita. Entonces, A es cerrado de X si y sólo si A es finito o $A = X$. En efecto: sea $A \subseteq X$. Entonces, por definición de la topología cofinita, tenemos que

$$\begin{aligned} A \text{ es cerrado} &\iff A^c \text{ es abierto} \iff (A^c)^c \text{ es finito o } (A^c)^c = X \\ &\iff A \text{ es finito o } A = X. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 1.36

Sea X un espacio topológico. Entonces:

(C1) $\emptyset$ y X son cerrados de X .

(C2) La intersección arbitraria de cerrados de X es un cerrado de X .

(C3) La unión finita de cerrados de X es un cerrado de X .

Demostración. (C1) Como $\emptyset$ y X son abiertos de X , entonces $\emptyset^c = X$ y $X^c = \emptyset$ son abiertos. Entonces $\emptyset$ y X son cerrados.

(C2) Sea $\{F_i : i \in I\}$ una familia de cerrados de X . Entonces, para cada $i \in I$, F_i^c es un abierto de X . Entonces

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c.$$

Como todos los F_i^c son abiertos, entonces por (ET2), $\bigcup_{i \in I} F_i^c$ es abierto. Luego, $\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c$ es abierto. Por lo tanto, $\bigcap_{i \in I} F_i$ es cerrado de X .

(C3) Sean F y G cerrados de X . Entonces F^c y G^c son abiertos de X . Entonces $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$ es abierto, por (ET3). Por lo tanto, $F \cup G$ es cerrado. ■

Observación 1.37. Cuando trabajamos con espacios y subespacios es importante indicar dónde un conjunto es o no abierto/cerrado. También es importante tener presente e indicar en dónde se toma complemento. Por ejemplo, si Y es subespacio de X y $B \subseteq Y$, entonces B^c puede significar dos cosas: (1) el complemento de B relativo a X , es decir, $B^c = X - B$; o (2) el complemento de B relativo a Y , esto es, $B^c = Y - B$. Por lo tanto, será fundamental indicar dónde se toma complemento.

Proposición 1.38

Sea X un espacio topológico y sea Y un subespacio de X . Entonces, un conjunto $B \subseteq Y$ es cerrado de Y si y sólo si existe un cerrado A de X tal que $B = A \cap Y$.

Demostración. Sea X un espacio topológico y sea Y un subespacio de X . Sea $B \subseteq Y$.

($\Rightarrow$) Supongamos que B es cerrado de Y . Entonces $B^c = Y - B$ es abierto de Y . Con lo cual existe un abierto U de X tal que $B^c = Y - B = U \cap Y$. Entonces $B = Y - (B^c - Y) = Y - (U \cap Y) = Y - U = Y \cap (X - U)$. Tomando $A := X - U$, tenemos que A es cerrado de X y $B = Y \cap A$.

($\Leftarrow$) Supongamos que A es un cerrado de X tal que $B = A \cap Y$. Como $B^c = Y - B = Y - (A \cap Y) = Y - A = Y \cap \underbrace{(X - A)}_{\text{abierto de } X}$, tenemos que $B^c = Y - B$ es abierto de Y . Por lo tanto, B es cerrado de Y . ■

Definición 1.39

Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. La **clausura** de A es el siguiente conjunto cerrado de X :

$$\overline{A} = \bigcap \{C : C \text{ es un cerrado de } X \text{ tal que } A \subseteq C\}.$$

En palabras, la clausura de un conjunto A es la intersección de todos los cerrados del espacio que contienen a A . Observemos que como la clausura de A es una intersección de cerrados, ella misma es un cerrado del espacio. Además, observemos de la definición que $A \subseteq \overline{A}$.

Ejemplo 1.40. Sea $\mathbb{R}$ con la topología cofinita. Sea $P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$. Por el Ejemplo 1.35 sabemos que los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ son los subconjuntos finitos y $\mathbb{R}$ mismo. Entonces, el único cerrado que contiene a P es $\mathbb{R}$. Entonces,

$$\overline{P} = \bigcap \{C : C \text{ es cerrado y } P \subseteq C\} = \bigcap \{\mathbb{R}\} = \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Ahora presentaremos algunas caracterizaciones útiles para obtener la clausura de un conjunto.

Proposición 1.41

Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces, $\overline{A}$ (la clausura de A) es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a A .

Demostración. Para probar que $\overline{A}$ es el menor cerrado de X que contiene a A debemos probar los siguientes tres puntos.

1. $\overline{A}$ es cerrado. En efecto, por definición, $\overline{A}$ es intersección de cerrados. Con lo cual, $\overline{A}$ es cerrado.
2. $A \subseteq \overline{A}$. En efecto, como miembro en la familia $\{C : C \text{ es un cerrado de } X \text{ tal que } A \subseteq C\}$ contiene a A , la intersección contiene a A , esto es,

$$A \subseteq \bigcap \{C : C \text{ es un cerrado de } X \text{ tal que } A \subseteq C\} = \overline{A}.$$

3. Si F es cerrado y $A \subseteq F$, entonces debemos probar que $\overline{A} \subseteq F$. Supongamos que F es cerrado y $A \subseteq F$. Entonces $F \in \{C : C \text{ es un cerrado de } X \text{ tal que } A \subseteq C\}$. Con lo cual $\overline{A} = \bigcap \{C : C \text{ es un cerrado de } X \text{ tal que } A \subseteq C\} \subseteq F$. ■

La proposición anterior nos da una forma de comprobar si un conjunto C es la clausura de un conjunto A . Esto es, C es la clausura de A si y sólo si:

- (I) C es cerrado;
- (II) $A \subseteq C$;
- (III) Si D es un cerrado tal que $A \subseteq D$, entonces $C \subseteq D$.

El siguiente resultado nos da una forma efectiva de obtener la clausura de un conjunto A .

Proposición 1.42

Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces,

$$x \in \overline{A} \text{ si y sólo si para todo entorno } U \text{ de } x, U \cap A \neq \emptyset.$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $x \in \overline{A}$. Sea U un entorno de x . Si $U \cap A = \emptyset$, entonces $A \subseteq U^c$, siendo U^c cerrado. Entonces $x \in \overline{A} \subseteq U^c$, es decir, $x \notin U$. Es absurdo pues $x \in U$ (por ser U entorno de x).

$(\Leftarrow)$ Supongamos que para todo entorno U de x , se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$. Sea C un cerrado de X tal que $A \subseteq C$. Entonces C^c es abierto y $A \cap C^c = \emptyset$. Si $x \in C^c$, entonces C^c (por ser abierto) sería un entorno de x , y por hipótesis tendríamos que $C^c \cap A \neq \emptyset$, lo cual sería absurdo. Entonces, $x \notin C^c$. Es decir, $x \in C$. Hemos probado que $x \in \bigcap \{C : C \text{ es cerrado de } X \text{ y } A \subseteq C\} = \overline{A}$. ■

Proposición 1.43

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para X . Sea $A \subseteq X$. Entonces,

$$x \in \overline{A} \text{ si y sólo si para todo abierto básico } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B, B \cap A \neq \emptyset.$$

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.34. ■

Ejemplo 1.44. Sea $A = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Calculemos la clausura de A en el espacio $\mathbb{R}_u$. Primero, ya sabemos que $(0, 1] \subseteq \overline{(0, 1]}$. El lector puede comprobar, al menos gráficamente, que para todo intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in (a, b)$, entonces $(a, b) \cap (0, 1] \neq \emptyset$. Entonces $0 \in \overline{(0, 1]}$.

Entonces, $[0, 1] \subseteq \overline{(0, 1]}$. Ahora, como $C = [0, 1]$ es cerrado de $\mathbb{R}_u$ y $(0, 1] \subseteq [0, 1]$, entonces $\overline{(0, 1]} \subseteq [0, 1]$ (por ser $\overline{(0, 1]}$ el menor cerrado que contiene a $(0, 1]$). Por lo tanto, $\overline{(0, 1]} = [0, 1]$. ■

Ejemplo 1.45. Calculemos la clausura de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}_u$. Observemos que por la propiedad de la densidad de los números racionales en $\mathbb{R}$, tenemos que para cualquier intervalo abierto (a, b) , $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Entonces todo $x \in \mathbb{R}$ pertenece a $\overline{\mathbb{Q}}$. Es decir, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ■

Ejemplo 1.46. Determinemos la clausura de $\mathbb{Z}$ en el espacio $\mathbb{R}_S$. Sabemos que $\mathbb{Z} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$. Sea ahora $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Sabemos que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k < x < k + 1$. Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $k < y < x$. Entonces, tenemos que $x \in [y, k + 1)$ y $[y, k + 1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. En consecuencia, $x \notin \overline{\mathbb{Z}}$ (pues encontramos un abierto $[y, k + 1)$ del espacio $\mathbb{R}_S$ tal que contiene al punto x , pero tiene intersección vacía con $\mathbb{Z}$). Por lo tanto, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. ■

Veamos algunas propiedades importantes de la clausura.

Proposición 1.47

Sea X un espacio y sean $A, B \subseteq X$.

- (1) $A \subseteq \overline{A}$.
- (2) A es cerrado de X si y sólo si $A = \overline{A}$.
- (3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- (4) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
- (5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (6) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demostración. (1) Fue probado en la Proposición 1.41.

(2) $(\Rightarrow)$ Supongamos que A es cerrado. Como $A \subseteq \overline{A}$, entonces $A \in \{C : C \text{ es cerrado y } A \subseteq C\}$. Entonces $A = \bigcap \{C : C \text{ es cerrado y } A \subseteq C\} = \overline{A}$. $(\Leftarrow)$ Supongamos que $A = \overline{A}$. Por definición, $\overline{A}$ es cerrado. Por lo tanto, A es cerrado.

(3) Es consecuencia de (2).

(4) Supongamos que $A \subseteq B$. Entonces $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$. Por la Proposición 1.41, $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A . Entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(5) Probamos por doble inclusión. $(\supseteq)$ Primero, como $A, B \subseteq A \cup B$, entonces por el punto (4), tenemos que $\overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Entonces $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. $(\subseteq)$ Por la Proposición

1.41 sabemos que $\overline{A \cup B}$ es el menor cerrado que contiene a $A \cup B$. Ahora, por el punto (1), tenemos que $A \subseteq \overline{A}$ y $B \subseteq \overline{B}$. Entonces $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, y $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado (por ser una unión finita de cerrados). Por lo tanto, $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

(6) Es consecuencia de (4). Los detalles a cargo del lector. ■

Ejemplo 1.48. Veamos un ejemplo sencillo donde no se cumple que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Sean $A = (0, 1)$ y $B = (1, 2)$ abiertos de $\mathbb{R}_u$. Entonces,

$$\overline{A \cap B} = \overline{(0, 1) \cap (1, 2)} = \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Por el otro lado, tenemos que

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(0, 1)} \cap \overline{(1, 2)} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}.$$

Con lo cual, observamos que $\overline{A \cap B} \not\subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. ■

Sea X un espacio y sea Y subespacio de X . Si $A \subseteq Y$, entonces A también es subconjunto de X . Con lo cual, podemos considerar la clausura de A en el espacio X o su clausura en el espacio Y con la topología subespacio. Estas clausuras pueden ser distintas, por eso debemos distinguirlas. Así, cuando sea necesario denotaremos por:

Sea Y un subespacio de un espacio X , y sea $A \subseteq Y$. Entonces:

- $\overline{A}^X$ denota la clausura de A en el espacio X .
- $\overline{A}^Y$ denota la clausura de A en el espacio Y (con la topología subespacio).

Sea tiene la siguiente relación entre la clausura de un conjunto en un espacio y en un subespacio.

Proposición 1.49

Sea X un espacio topológico y sea Y un subespacio de X . Sea $A \subseteq Y$. Entonces:

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y.$$

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.40. ■

Definición 1.50

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto D de X es llamado **denso** de X si $\overline{D} = X$.

Ejemplo 1.51. Ya vimos que en el espacio $\mathbb{R}_u$ tenemos que $\overline{Q} = \mathbb{R}$. Entonces Q es denso en $\mathbb{R}_u$. ■

Proposición 1.52

Sea X un espacio topológico y $D \subseteq X$. Entonces:

- (1) D es denso en X si y sólo si para cada abierto no vacío U se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$.
- (2) Si $\mathcal{B}$ es una base del espacio X , entonces D es denso en X si y sólo si para cada abierto básico $B \in \mathcal{B}$ no vacío se tiene que $B \cap D \neq \emptyset$.

Demostración. (1) $(\Rightarrow)$ Supongamos que D es denso en X , esto es, $\overline{D} = X$. Sea U un abierto no vacío de X . Entonces, existe un $x \in U$. Como $x \in X = \overline{D}$ y $x \in U$, tenemos por la Proposición 1.42 que $U \cap D \neq \emptyset$. $(\Leftarrow)$. Sea $x \in X$. Sea U un abierto tal que $x \in U$. Entonces U es no vacío. Luego, por hipótesis, $U \cap D \neq \emptyset$. Esto implica que $x \in \overline{D}$. Por lo tanto, $X = \overline{D}$.

(2) A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.42. ■

Ejemplo 1.53. Sea $\tau_{rd} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ la topología del rayo derecho (véase el Ejemplo 1.7). Vemos que $\mathbb{Z}$ es denso en este espacio. Sea U un abierto no vacío. Entonces $U = \mathbb{R}$ o $U = (a, \infty)$. En cualquier caso, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \in U$. Es decir, $U \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. ■

Introducimos ahora un concepto estrechamente relacionado con el de clausura.

Definición 1.54

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que $x_0 \in X$ es un **punto de acumulación** (también se conoce como **punto límite**) de A si para cada entorno U de x_0 se tiene que $U \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Proposición 1.55

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de X . Sea $A \subseteq X$. Entonces, un punto $x_0 \in X$ es punto de acumulación de A si y sólo si para cada $B \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in B$ se tiene que $B \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.43. ■

Al conjunto puntos de acumulación de un conjunto A se lo suele llamar **el conjunto derivado** de A y lo denotaremos por A' .

Proposición 1.56

Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$. Entonces:

- (1) Si $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B'$.
- (2) $\overline{A} = A \cup A'$.
- (3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
- (4) A es cerrado de X si y sólo si $A' \subseteq A$.

Demostración. Probamos sólo (2), el resto queda a cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.44.

(2) Primero, por la Proposición 1.47, tenemos que $A \subseteq \overline{A}$. Por definición de A' y por la Proposición 1.42, tenemos que $A' \subseteq \overline{A}$. Entonces, $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Sea ahora $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup A'$. Supongamos que $x \notin A$. Probemos que $x \in A'$. Sea U un entorno de x . Como $x \in \overline{A}$ y U es un entorno de x , tenemos por la Proposición 1.42 que $U \cap A \neq \emptyset$. Como $x \notin A$, se tiene que $x \notin U \cap A$. Entonces $U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in A'$. Por lo tanto, hemos probado que $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. ■

Ejemplo 1.57. Sea X un conjunto y consideremos la topología cofinita sobre X . Probaremos que para cada conjunto $A \subseteq X$, tenemos que

$$A' = \begin{cases} X & \text{si } A \text{ es infinito} \\ \emptyset & \text{si } A \text{ es finito.} \end{cases}$$

Supongamos primero que A es infinito. Debemos probar que $A' = X$. Sea $x \in X$. Sea U un abierto de X tal que $x \in U$. Debemos probar que $U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Como U es abierto es de la forma $U = X - \{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces $x \neq x_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Como A es infinito, existe un $y \in A$ tal que $y \notin \{x_1, \dots, x_n, x\}$. Entonces $y \in U \cap A - \{x\}$. Con lo cual $U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Entonces $x \in A'$. Por lo tanto, $A' = X$.

Supongamos ahora que A es finito. Debemos probar que $A' = \emptyset$. Vamos a probar que ningún elemento de X pertenece a A' . Sea $x \in X$. Tenemos dos casos: $x \in A$ o $x \notin A$.

Caso 1: $x \in A$. Sea $U = A^c \cup \{x\}$. Entonces U es abierto y $x \in U$. Ahora

$$A \cap U - \{x\} = \underbrace{A \cap (A^c \cup \{x\})}_{=\{x\}} - \{x\} = \emptyset.$$

Entonces, $x \notin A'$.

Caso 2: $x \notin A$. Sea $U = A^c$. Entonces U es abierto de X y $x \in U$. Como

$$U \cap A - \{x\} = A^c \cap A - \{x\} = \emptyset$$

tenemos que $x \notin A'$.

Por lo tanto, $A' = \emptyset$. ■

Finalizamos esta sección presentando la definición de ciertos espacios topológicos que son muy importantes y los cuales aparecen muy a menudo en matemática.

Definición 1.58

Diremos que un espacio topológico X es de **Hausdorff** si para todo par de puntos distintos x e y de X , existen dos conjuntos abiertos disjuntos U y V de X tales que $x \in U$ e $y \in V$.

Ejemplo 1.59. $\mathbb{R}$ con la topología usual es de Hausdorff. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ distintos. Supongamos que $x < y$. Entonces sabemos que existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $x < c < y$. Entonces, existen $(x - 1, c)$ y $(c, y + 1)$ abiertos de $\mathbb{R}_u$ tal que $x \in (x - 1, c)$, $y \in (c, y + 1)$ y $(x - 1, c) \cap (c, y + 1) = \emptyset$. ■

Proposición 1.60

Todo subconjunto finito de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración. Probemos primero que todo subconjunto unipuntual de X es cerrado. Sea $x \in X$ y probemos que $\{x\}$ es cerrado. Para ello debemos probar que $\{x\}^c = X - \{x\}$ es abierto. Usaremos la Proposición 1.8. Sea $y \in \{x\}^c$. Entonces $y \neq x$. Por ser X de Hausdorff, existen dos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces, se puede comprobar que $y \in V \subseteq U^c \subseteq X - \{x\} = \{x\}^c$. Es decir, existe un abierto V tal que $y \in V \subseteq \{x\}^c$. Entonces, por la Proposición 1.8, $\{x\}^c$ es abierto. Por lo tanto, $\{x\}$ es cerrado.

Ahora probemos que cualquier subconjunto finito es cerrado. Sea $A \subseteq X$ finito. Digamos $A = \{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces $A = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$. Con lo cual, A es unión finita de cerrados, entonces A es cerrado. ■

Definición 1.61

Sea X un espacio topológico. Diremos que una sucesión (x_n) de puntos de X **converge** a un punto x_0 si para todo entorno U de x_0 , existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$.

Sabemos que toda sucesión convergente de números reales (en el sentido usual estudiado en un curso de Análisis) converge a un único número. Esto no es verdad en el contexto de espacios topológicos arbitrarios. En cambio, si el espacio es de Hausdorff, entonces se cumple que las sucesiones convergen a lo sumo un punto.

Proposición 1.62

Si X es un espacio de Hausdorff, entonces toda sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X .

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff. Supongamos que (x_n) es una sucesión de puntos de X que converge a dos puntos distintos x_0 e y_0 . Como $x_0 \neq y_0$, existen dos abiertos disjuntos U y V tales que $x_0 \in U$ e $y_0 \in V$. Por definición de convergencia tenemos que:

- $x_0 \in U \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U, \forall n \geq n_0$.
- $y_0 \in V \implies \exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V, \forall n \geq m_0$.

Supongamos que $n_0 \leq m_0$. Entonces, de los dos puntos anteriores obtenemos que $x_{m_0} \in U$ y $x_{m_0} \in V$. Absurdo, pues U y V son disjuntos. Por lo tanto, $x_0 = y_0$. ■

1.4. Interior y Frontera

Definición 1.63

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. El **interior** de A se denota por A° y se define como:

$$A^\circ = \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ es abierto de } X \text{ y } U \subseteq A\}$$

En palabras, el interior de un conjunto A es la unión de todos los abiertos que están incluidos en A . Observemos que el interior de A es una unión de abiertos, entonces es también un abierto. Además $A^\circ \subseteq A$.

El lector puede notar que la definición de interior es dual a la de clausura. En lugar de usar intersección, se usa unión. En lugar de usar cerrados, se usan abiertos. Y en lugar de que A este incluido en el cerrado, los abiertos están incluidos en A . Varias propiedades y resultados sobre el concepto de interior son duales al de los de clausura, así que dejaremos a cargo del lector muchas de sus demostraciones.

Proposición 1.64

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces, A° (el interior de A) es el mayor abierto incluido en A .

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.48. ■

En palabras, un U es el interior de un conjunto A si:

(I) U es abierto.

(II) $U \subseteq A$.

(III) Si V es un abierto tal que $V \subseteq A$, entonces $V \subseteq U$.

Proposición 1.65

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Sea $x \in X$. Entonces

(1) $x \in A^\circ$ si y sólo si existe un U abierto tal que $x \in U \subseteq A$.

(2) Si el espacio X tiene una base $\mathcal{B}$, entonces

$$x \in A^\circ \text{ si y sólo si existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq A.$$

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.49. ■

Ejemplo 1.66. Sea $A = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Calculemos el interior de A en el espacio $\mathbb{R}_u$. Sabemos que $(0, 1]^\circ \subseteq (0, 1]$. El lector puede comprobar (al menos gráficamente) que $1 \notin (0, 1]^\circ$, porque para cualquier intervalo abierto (a, b) que contiene a 1, se tiene que $(a, b) \not\subseteq (0, 1]$. Entonces $(0, 1]^\circ \subseteq (0, 1)$. Como $(0, 1)$ es abierto y $(0, 1) \subseteq (0, 1]$, entonces $(0, 1) \subseteq (0, 1]^\circ$. Por lo tanto, $(0, 1]^\circ = (0, 1)$. ■

Proposición 1.67

Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$. Entonces:

(1) $A^\circ \subseteq A$.

(2) A es abierto si y sólo si $A = A^\circ$.

(3) $(A^\circ)^\circ$.

(4) Si $A \subseteq B$, entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(5) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.51. ■

Definición 1.68

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. La **frontera** del conjunto A se denota por $\text{Fr}(A)$ y se define como:

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Proposición 1.69

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces

1. $\text{Fr}(A)$ es cerrado.
2. A es abierto y cerrado si y sólo si $\text{Fr}(A) = \emptyset$.
3. $x \in \text{Fr}(A)$ si y sólo si para cada entorno U de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A^c \neq \emptyset$.
4. $\overline{A} = A^\circ \cup \text{Fr}(A)$.

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.55. ■

1.5. Funciones continuas

Definición 1.70

Sean $\langle X, \tau_X \rangle$ y $\langle Y, \tau_Y \rangle$ espacios topológicos. Diremos que una función $f: X \rightarrow Y$ es **continua** si para todo $V \in \tau_Y$, se tiene que $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Es decir,

Diremos que una función $f: X \rightarrow Y$ es **continua** del espacio X en el espacio Y si $f^{-1}(V)$ es abierto de X , para todo abierto V de Y .

Ejemplo 1.71. Si X es un espacio con la topología discreta, entonces para cualquier espacio Y se tiene que toda función $f: X \rightarrow Y$ es continua. En efecto, sea V un abierto de Y . Como $f^{-1}(V) \subseteq X$ y X tiene la topología discreta, $f^{-1}(V)$ es abierto de X . ■

Cuando el espacio de llegada tiene una base, tenemos la siguiente caracterización útil de continuidad.

Proposición 1.72

Sean X e Y espacios topológicos. Sea $\mathcal{C}$ una base de Y . Entonces, una función $f: X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si para cada $V \in \mathcal{C}$, $f^{-1}(V)$ es abierto de X .

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $f: X \rightarrow Y$ es continua. Sea $V \in \mathcal{C}$. Entonces V es en particular un abierto de Y . Entonces, por ser f continua, $f^{-1}(V)$ es abierto de X .

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $f^{-1}(V)$ es abierto de X para todo $V \in \mathcal{C}$. Probemos que f es continua. Sea W un abierto de Y . Debemos probar que $f^{-1}(W)$ es abierto de X . Usamos la Proposición 1.8. Sea $x \in f^{-1}(W)$. Entonces, $f(x) \in W$. Como W es abierto de Y y $\mathcal{C}$ es una base de Y , existe un $V \in \mathcal{C}$ tal que $f(x) \in V \subseteq W$. Entonces, $x \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$. Por hipótesis, $f^{-1}(V)$ es abierto de X . Es decir, existe un abierto $U := f^{-1}(V)$ tal que $x \in U \subseteq f^{-1}(W)$. Entonces, podemos afirmar que $f^{-1}(W)$ es abierto de X . Por lo tanto, f es continua. ■

Ejemplo 1.73. Consideremos los espacios $\mathbb{R}_u$ y $\mathbb{R}_S$, y la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ (es decir, la función identidad).

- $f: \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}_u$ es continua. En efecto, para cada abierto básico (a, b) del espacio $\mathbb{R}_u$, se tiene que $f^{-1}((a, b)) = (a, b)$ es un abierto de $\mathbb{R}_S$.
- $f: \mathbb{R}_u \rightarrow \mathbb{R}_S$ no es continua. En efecto, existe el abierto $[0, 1)$ de $\mathbb{R}_S$ tal que $f^{-1}([0, 1)) = [0, 1)$ no es un abierto de $\mathbb{R}_u$. ■

Ejemplo 1.74. Sea $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ subespacio de $\mathbb{R}_u$. Sea $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces f es continua del espacio $\mathbb{R}^*$ al espacio $\mathbb{R}_u$. En efecto, sea $V = (a, b)$ un abierto básico de $\mathbb{R}_u$. Entonces, se puede probar (o al menos comprobar gráficamente) que

$$f^{-1}((a, b)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right) & \text{si } a > 0 \text{ o } b < 0 \\ \left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{b}, \infty\right) & \text{si } a < 0 < b. \end{cases}$$

Ambos conjuntos $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$ y $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{b}, \infty\right)$ son abiertos del espacio $\mathbb{R}^*$. ■

En caso que el espacio de llegada tenga una subbase tenemos la siguiente caracterización.

Proposición 1.75

Sean X e Y espacios, y sea $\mathcal{S}$ una subbase de Y . Entonces, una función $f: X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si $f^{-1}(S)$ es abierto de X para todo $S \in \mathcal{S}$.

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 1.60. ■

Las siguientes caracterizaciones de continuidad nos serán de mucha ayuda a lo largo del apunte, por eso es importante que el lector las tenga en cuenta siempre que hablemos de función continua.

Proposición 1.76

Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) f es continua.
- (2) Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
- (3) $f^{-1}(B)$ es un cerrado de X , para todo B cerrado de Y .
- (4) Para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subseteq V$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $A \subseteq X$. Sea $y \in f(\overline{A})$. Entonces $y = f(x)$ para algún $x \in \overline{A}$. Sea V un abierto del espacio Y tal que $y \in V$. Luego $f(x) = y \in V$. Entonces $x \in f^{-1}(V)$. Con lo cual $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Entonces $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $y \in \overline{f(A)}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea B un cerrado del espacio Y . Tomando $A := f^{-1}(B)$, tenemos por (2) que

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))}.$$

Como $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, se tiene que $\overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B$. Entonces,

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq B \implies \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B).$$

Con lo cual, $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$. Por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es cerrado de X .

Las implicaciones (3) $\Rightarrow$ (1), (1) $\Rightarrow$ (4) y (4) $\Rightarrow$ (1) son sencillas y se dejan a cargo del lector. ■

Proposición 1.77

Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Sea $\mathcal{C}$ una base del espacio Y . Entonces, f es continua si y sólo si para cada $x \in X$ y para todo $C \in \mathcal{C}$ tal que $f(x) \in C$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subseteq C$.

Demostración. A cargo del lector. ■

Ejemplo 1.78. Consideremos el espacio $\mathbb{R}_u$. Entonces, una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua del espacio $\mathbb{R}_u$ en $\mathbb{R}_u$ si y sólo si f es continua según la definición $\epsilon - \delta$ estudiada en Análisis Real. Recordemos que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua según la definición $\epsilon - \delta$ si para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que

para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Notemos también que

$$|x - x_0| < \delta \iff x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (1.1)$$

y

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon &\iff f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \\ &\iff x \in f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Entonces, se tiene que la implicación $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ es equivalente a la inclusión

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)). \quad (1.3)$$

($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua del espacio $\mathbb{R}_u$ en $\mathbb{R}_u$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Entonces $f(x_0) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Luego

$$x_0 \in f^{-1}\left(\underbrace{(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)}_{\text{abierto de } \mathbb{R}_u}\right).$$

Entonces, existe un intervalo abierto (c, d) tal que

$$x_0 \in (c, d) \subseteq f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)).$$

Tomando $\delta := \frac{\min\{x_0 - c, c - d\}}{2}$, se obtiene que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (c, d) \subseteq f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)).$$

Por lo tanto, f es continua según la definición $\epsilon - \delta$.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es continua según a la definición $\epsilon - \delta$ de Análisis. Sea (a, b) un abierto básico del espacio $\mathbb{R}_u$. Debemos probar que $f^{-1}(a, b)$ es abierto de $\mathbb{R}_u$. Sea $x_0 \in f^{-1}(a, b)$. Entonces $f(x_0) \in (a, b)$. Sea $\epsilon := \frac{\min\{f(x_0) - a, b - f(x_0)\}}{2}$. Notemos que

$$(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subseteq (a, b).$$

Ahora, como $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)).$$

Entonces, por lo anterior obtenemos que

$$x_0 \in \underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}_{\text{abierto básico de } \mathbb{R}_u} \subseteq f^{-1}(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subseteq f^{-1}(a, b).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(a, b)$ es abierto de $\mathbb{R}_u$. ■

Definición 1.79

Sean X e Y espacios y $f: X \rightarrow Y$ una función. Diremos que:

- f es **abierto** si para cada U abierto de X , se tiene que $f(U)$ es abierto de Y .
- f es **cerrada** si para cada A cerrado de X , se tiene que $f(A)$ es cerrado de Y .

Una función puede ser continua y no ser ni abierta ni cerrada. También, una función puede ser abierta y no cerrado, o viceversa. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.80. Sea X un conjunto con la topología discreta e Y un conjunto (con más de un elemento) con la topología indiscreta. Sea $f: X \rightarrow Y$ cualquier función no constante. Entonces f es continua (porque el dominio tiene la topología discreta) y no es ni abierta ni cerrada. Sea $x \in X$. Entonces el conjunto unipuntual $\{x\}$ es abierto y cerrado de X . Pero $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ no es ni abierto ni cerrado de Y , porque los únicos abiertos de Y son $\emptyset$ e Y .

Ejemplo 1.81. Veamos un ejemplo de una función continua y abierta, pero no cerrada. Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (con las topologías usuales) dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces:

f es continua: En efecto, en Análisis se probó que es continua según la definición $\epsilon - \delta$. Entonces, por el Ejemplo 1.78, f es continua.

f es abierta: Los abiertos básicos del espacio $(0, +\infty)$ son de la forma (a, b) con $0 \leq a < b$. Sean $0 < a < b$. Entonces:

$$\begin{aligned} y \in f(a, b) &\iff y = f(x) \text{ para algún } x \in (a, b) \\ &\iff y = \frac{1}{x} \text{ para algún } a < x < b \\ &\iff y = \frac{1}{x} \text{ para algún } x \text{ tal que } \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} \\ &\iff y \in \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Entonces $f(a, b) = (\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$ para $0 < a < b$. Con un argumento similar podemos mostrar que $f(0, b) = (\frac{1}{b}, +\infty)$. Entonces, $f(a, b)$ es abierto de $\mathbb{R}$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq a < b$.

f no es cerrada: El conjunto $[1, +\infty)$ es un cerrado del espacio $(0, +\infty)$, pero $f([1, +\infty)) = (0, 1]$ no es cerrado del espacio $\mathbb{R}$. ■

Definición 1.82

Sea X e Y espacios. Diremos que una función $f: X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo** si f es biyectiva, continua y abierta.

Observación 1.83. Sean X e Y espacios y $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva. No es difícil probar que f es abierta si y sólo si la función inversa de f , $f^{-1}: Y \rightarrow X$ es continua (véase el Ejercicio 1.63). Entonces, una función $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo si y sólo si es biyectiva y f y f^{-1} son continuas.

El lector puede comprobar sin dificultad, usando propiedades de función, que si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces la función inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ (la cual existe pues f es biyectiva) es también un homeomorfismo. Diremos que dos espacios X e Y son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo $f: X \rightarrow Y$. Que dos espacios X e Y sean homeomorfos significa que ellos son, topológicamente hablando, *iguales*.

Ejemplo 1.84. Consideremos el subespacio $(-1, 1)$ del espacio $\mathbb{R}_u$. Entonces, los espacios $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}_u$ son homeomorfos. La función $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

es un homeomorfismo. En efecto, primero recordemos de Análisis Real que f es continua según la definición $\epsilon - \delta$, ya que es el cociente de dos funciones continuas. Ahora, por el Ejemplo 1.78, sabemos que f es también continua en nuestro sentido (Definición 1.70). Por otra parte, f es biyectiva porque la función $g: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ definida por

$$g(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

es la inversa de f , esto es, $(f \circ g)(y) = y$ y $(g \circ f)(x) = x$, para todo $y \in \mathbb{R}$ y todo $x \in (-1, 1)$. ■

Diremos que una propiedad (P) es **topológica** si un espacio X tiene la propiedad (P) y es homeomorfo a un espacio Y , entonces Y también tiene la propiedad (P).

Si X e Y son homeomorfos, entonces satisfacen exactamente las mismas propiedades topológicas. Así, podemos pensar que dos espacios homeomorfos son *topológicamente idénticos*, no se pueden diferenciar por una propiedad topológica.

Proposición 1.85: Construcción de funciones continuas

Sean X, Y, Z espacios topológicos.

- (1) **(Inclusión)** Si A es un subespacio de X , entonces la función **inclusión** $i: A \rightarrow X$, definida por $i(a) = a$ para todo $a \in A$, es continua.
- (2) **(Composición)** Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son continuas, entonces la función composición $g \circ f: X \rightarrow Z$ es continua.
- (3) **(Restricción del dominio)** Si $f: X \rightarrow Y$ es continua y A es un subespacio de X , entonces la función restricción^a $f|_A: A \rightarrow Y$ es continua.
- (4) **(Restricción del rango)** Si $f: X \rightarrow Y$ es continua y Z es un subespacio de Y tal que $f(X) \subseteq Z$, entonces la función $f: X \rightarrow Z$ es continua.
- (5) **(Extensión del rango)** Si $f: X \rightarrow Y$ e Y es subespacio de Z , entonces la función $f: X \rightarrow Z$ es continua.

^aRecordemos que para una función $f: X \rightarrow Y$ y $A \subseteq X$, la función restricción $f|_A: A \rightarrow Y$ es definida por $f|_A(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Demostración. (1) Sea U un abierto de X . Se puede comprobar fácilmente que $i^{-1}(U) = U \cap A$, el cual es un abierto del subespacio A .

(2) Sea W un abierto de Z . Por ser g continua, $g^{-1}(W)$ es un abierto de Y . Ahora, por ser f continua tenemos que $f^{-1}(g^{-1}(W))$ es abierto de X . Entonces $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ es abierto de X . Por lo tanto, $g \circ f: X \rightarrow Z$ es continua.

(3) Sea V un abierto de Y . Se puede comprobar que $f|_A^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$, el cual es un abierto del subespacio A , ya que por ser f continua, $f^{-1}(V)$ es abierto de X .

(4) Supongamos que $f: X \rightarrow Y$ es continua, $Z \subseteq Y$ y $f(X) \subseteq Z$. Sea W un abierto del subespacio Z . Entonces, existe un abierto V de Y tal que $W = V \cap Z$. Ahora $f^{-1}(W) = f^{-1}(V \cap Z) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z)$. Como $f(X) \subseteq Z$, tenemos que $X = f^{-1}(Z)$. Entonces, $f^{-1}(W) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V)$ que es abierto de X por ser f continua. Por lo tanto, $f: X \rightarrow Z$ es continua.

(5) Supongamos que $f: X \rightarrow Y$ es continua e $Y \subseteq Z$. Debemos probar que $f: X \rightarrow Z$

es continua. Sea W un abierto de Z . Entonces el conjunto $V := W \cap Y$ es un abierto del subespacio Y . Por ser f continua, tenemos que $f^{-1}(V)$ es abierto de X . Ahora, $f^{-1}(V) = f^{-1}(W \cap Y) = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(W) \cap X = f^{-1}(W)$. Entonces, $f^{-1}(W)$ es abierto de X . Por lo tanto, $f: X \rightarrow Z$ es continua. ■

Ejercicios propuestos

Topología

Ejercicio 1.1. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$. Determinar si las siguientes colecciones son topologías sobre X .

- $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, e\}, \{a, d\}\}$.
- $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.
- $\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

Ejercicio 1.2. Sea X un conjunto y sea τ una topología sobre X . Probar que τ es la topología discreta sobre X ($\tau = \tau_{\text{dis}}$) si y sólo si $\{x\} \in \tau$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 1.3. Sea X un conjunto infinito.

(a) Probar que la colección

$$\tau_{\text{num}} = \{U \subseteq X : U^c \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología sobre X .

(b) Determinar si la colección

$$\tau = \{U \subseteq X : U^c \text{ es infinito}\} \cup \{X\}$$

es una topología sobre X .

Ejercicio 1.4. Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Sea ∞ un elemento que no pertenece a X . Sea $X^+ := X \cup \{\infty\}$. Probar que la colección $\tau_\infty = \tau \cup \{U \cup \{\infty\} : U \in \tau\}$ es una topología sobre X^+ donde el conjunto unipuntual $\{\infty\}$ es abierto.

Ejercicio 1.5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Probar que $\tau = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$.

Ejercicio 1.6. Sea $\{\tau_i : i \in I\}$ una familia de topologías sobre X . Probar que la colección

$$\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$$

es una topología sobre X .

Ejercicio 1.7. Sea τ una topología sobre un conjunto X . Sea $\mathcal{B}$ una base de τ . Probar que un $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para cada $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Ejercicio 1.8. Considerar la siguiente colección de intervalos abiertos: $\mathcal{C} = \{(x - \epsilon, x + \epsilon) : x \in \mathbb{R} \text{ y } \epsilon > 0\}$. Probar que $\mathcal{C}$ es una base para $\mathbb{R}_u$.

Ejercicio 1.9. Sea $\tau_{rd} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ la topología del rayo derecho sobre $\mathbb{R}$. Hallar una base (no trivial) para τ_{rd} .

Ejercicio 1.10. Sea $\mathbb{I}$ el conjunto de números reales irracionales. Sea

$$\tau = \{U \cup V : U \text{ es un abierto de } \mathbb{R}_u \text{ y } V \subseteq \mathbb{I}\}.$$

Probar que τ es una topología sobre $\mathbb{R}$ y hallar una base para τ . (El espacio $\langle \mathbb{R}, \tau \rangle$ es llamada la **recta dispersa**.)

Ejercicio 1.11. Sea X un conjunto y sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X . Sea $\mathcal{B}_1$ una base de τ_1 . Probar que si $\mathcal{B}_1 \subseteq \tau_2$, entonces $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Ejercicio 1.12. Considerar las tres topologías $\tau_{\mathcal{B}_u}$, $\tau_{\mathcal{B}_s}$ y $\tau_{\mathcal{B}_k}$ sobre $\mathbb{R}$ definidas en el Ejemplo 1.21. Probar que:

- (a) $\tau_{\mathcal{B}_u} \subset \tau_{\mathcal{B}_s}$. (b) $\tau_{\mathcal{B}_u} \subset \tau_{\mathcal{B}_k}$. (c) $\tau_{\mathcal{B}_s} \parallel \tau_{\mathcal{B}_k}$ ($\tau_{\mathcal{B}_s}$ y $\tau_{\mathcal{B}_k}$ son incomparables).

Ejercicio 1.13. Comparar las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}$:

- La topología del rayo derecho $\tau_{rd} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
- La topología cofinita.
- La topología usual $\tau_{\mathcal{B}_u}$.

Ejercicio 1.14. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X que satisface las condiciones (B1) y (B2). Probar que

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{ U \subseteq X : \exists \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } U = \bigcup \mathcal{B}_0 \right\}.$$

Ejercicio 1.15. Sea τ una topología sobre X , y sea $\mathcal{B}$ una base para τ . Probar que $\mathcal{B}$ satisface las condiciones (B1) y (B2). Probar que $\tau = \tau_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 1.16. Sea $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, q) : q \text{ es un racional}\}$.

- (a) Mostrar que $\mathcal{C}$ no es una topología sobre $\mathbb{R}$.
- (b) Probar que $\mathcal{C}$ es una base para una topología.
- (c) Determinar la topología generada por la base $\mathcal{C}$.

Ejercicio 1.17.

- (a) Considerar el espacio $\mathbb{R}_u$. Probar que la familia $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \text{ y } p < q\}$ es una base para la topología del espacio $\mathbb{R}_u$.
- (b) Considerar el espacio $\mathbb{R}_S$ (la recta Sorgenfrey). Probar que la familia $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{[p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \text{ y } p < q\}$ no es una base para la topología del espacio $\mathbb{R}_S$.
- (c) Probar que la familia $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \{[p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \text{ y } p < q\}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$ (es decir, que satisface las condiciones (B1) y (B2)). Probar que la topología del espacio $\mathbb{R}_S$ es estrictamente más fina que la topología $\tau_{\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}}$.

Ejercicio 1.18. Sea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el plano cartesiano. Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- $\mathcal{B}_{box} = \{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathcal{B}_{sf} = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R} \text{ y } r > 0\}$.

- (a) Probar que $\mathcal{B}_{box}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- (b) Probar que $\mathcal{B}_{sf}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- (c) Probar que las topologías $\tau_{\mathcal{B}_{box}}$ y $\tau_{\mathcal{B}_{sf}}$ son iguales.

Ejercicio 1.19. Considerar la siguiente colección de rectángulos semi-abiertos

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \times [c, d) : a < b \text{ y } c < d\}$$

en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- (a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) Sea τ_S la topología generada por la colección $\mathcal{B}$. El espacio $\langle \mathbb{R}^2, \tau_S \rangle$ se suele llamar el **plano Sorgenfrey**. Sea $Y = \{(x, y) : y = -x\}$. Probar que Y con la topología subespacio relativa a τ_S es la topología discreta.

Ejercicio 1.20. Sea X un conjunto y τ una topología sobre X . Sea $\mathcal{S} \subseteq \tau$. Probar que $\mathcal{S}$ es una subbase de τ si y sólo si la colección

$$\mathcal{B}_\mathcal{S} = \{S_1 \cap \cdots \cap S_n : n \in \mathbb{N} \text{ y } S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}\}$$

es una base de τ .

Ejercicio 1.21. Sea $\mathcal{S} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Probar que $\mathcal{S}$ es una subbase del espacio topológico $\mathbb{R}_u$. Además, probar que la base $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ está formada por todos los intervalos abiertos (a, b) de $\mathbb{R}$. Esto es, probar que $\mathcal{B}_\mathcal{S} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}$.

Ejercicio 1.22. Sea τ_{cof} la topología cofinita sobre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Probar que la colección

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{N} - \{n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

es una subbase para τ_{cof} .

Ejercicio 1.23. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y sea $\mathcal{S} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$. Determinar la base $\mathcal{B}_\mathcal{S}$, y hallar la topología $\tau_\mathcal{S}$ sobre X generada por la subbase $\mathcal{S}$.

Ejercicio 1.24. Sea $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{S} = \{\{1\}, \{2\}, \mathbb{P}\}$. Describir por extensión los miembros de la base $\mathcal{B}_\mathcal{S}$, y los miembros de la topología $\tau_\mathcal{S}$.

Ejercicio 1.25. Sea $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{S} = \{\ell : \ell \text{ es una línea recta en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$. Probar que la topología generada por $\mathcal{S}$ es la topología discreta. Es decir, probar que $\tau_\mathcal{S} = \tau_{\text{dis}}$.

(Indicación: Recuerde que τ es la topología discreta sobre un conjunto X si y sólo si $\{x\} \in \tau$ para todo $x \in X$.)

Subespacios

Ejercicio 1.26. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de X . Sea $Y \subseteq X$ un subespacio de X . Probar que la colección $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base para el espacio Y .

Ejercicio 1.27. Sea X un espacio y sea $Y \subseteq X$ un subespacio abierto de X . Probar que todo $V \subseteq Y$ abierto de Y es también abierto de X .

Ejercicio 1.28. Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ el subespacio del espacio $\mathbb{R}_u$. Describir los abiertos básicos del subespacio $\mathbb{R}^*$.

Ejercicio 1.29. Demostrar que todo subespacio de un espacio discreto es discreto.

Ejercicio 1.30. Sean A, B, C subconjuntos de un espacio topológico X tales que $C \subseteq A \cup B$. Dadas las topologías subespacios de A , B y $A \cup B$, probar que si C es un abierto del subespacio $A \cup B$, entonces $C \cap A$ es un abierto del subespacio A y $C \cap B$ es un abierto del subespacio B . Mostrar que la recíproca no se cumple.

Conjuntos cerrados y clausura

Ejercicio 1.31. Sea X un conjunto. Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X que cumple las siguientes condiciones²

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

(C2) Si $\{C_\alpha : \alpha \in \Gamma\} \subseteq \mathcal{C}$, entonces $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha \in \mathcal{C}$.

(C3) Si $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$, entonces $C_1 \cup \dots \cup C_n \in \mathcal{C}$.

Probar que la colección $\tau = \{U : U^c \in \mathcal{C}\}$ es una topología sobre X . Además, probar que A es cerrado del espacio $\langle X, \tau \rangle$ si y sólo si $A \in \mathcal{C}$.

Ejercicio 1.32. Sea X un espacio topológico con una base $\mathcal{B}$. Sea A un subconjunto cerrado de X y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin A$. Probar que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in B$ y $B \cap A = \emptyset$.

Ejercicio 1.33. Sea X un espacio topológico. Sea U un abierto y A un cerrado de X . Probar que:

(a) $U - A$ es abierto de X .

(b) $A - U$ es cerrado de X .

Ejercicio 1.34. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para X . Sea $A \subseteq X$. Probar que:

$$x \in \overline{A} \text{ si y sólo si para todo } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B, B \cap A \neq \emptyset.$$

Ejercicio 1.35. Considerar el conjunto X y la topología τ del Ejemplo 1.5. Listar todos los subconjuntos cerrados del espacio $\langle X, \tau \rangle$, y hallar las clausuras de los siguientes conjuntos:

$$A = \{a, b, e\} \quad B = \{a, d\} \quad C = \{c, d, e\} \quad D = \{b, c, d\}.$$

²Compare estas condiciones con aquellas en la Proposición 1.36.

Ejercicio 1.36. Considerar la topología $\tau = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ sobre $\mathbb{N}$ dada en el Ejercicio 1.5. Determinar los subconjuntos cerrados de este espacio. Hallar las clausuras de los siguientes subconjuntos:

$$A = \{3, 15, 77, 213\} \quad \text{y} \quad B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

¿Qué conclusión puede extraer sobre la clausura de un subconjunto de este espacio?

Ejercicio 1.37. Considerar la topología del rayo derecho $\tau_{rd} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ sobre $\mathbb{R}$. Determinar los subconjuntos cerrados de este espacio. Hallar las clausuras de los siguientes subconjuntos:

$$A = \{3, 15, 77, 213\} \quad B = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \quad C = (-2, 5).$$

Ejercicio 1.38. Para cada uno de los conjuntos siguientes determinar su clausura en los espacios $\mathbb{R}_u$, $\mathbb{R}_S$, R_K , y en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.

$$(a) (a, b). \quad (b) \mathbb{Z}. \quad (c) K = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ejercicio 1.39. Consideremos la topología $\tau_{\mathcal{B}_Q}$ sobre $\mathbb{R}$ generada por la base $\mathcal{B}_Q = \{[p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \text{ y } p < q\}$ (véase el Ejercicio 1.17). Determinar la clausura de los intervalos $(0, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, 3)$.

Ejercicio 1.40. Sea X un espacio topológico y sea Y un subespacio de X . Sea $A \subseteq Y$. Probar que $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

Ejercicio 1.41. Sea X un conjunto infinito y sea $x_0 \in X$. Sea

$$\tau = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\}.$$

Probar que:

- (a) τ es una topología sobre X .
- (b) Para todo $x \in X$ tal que $x \neq x_0$, el conjunto $\{x\}$ es ambo abierto y cerrado.
- (c) El conjunto $\{x_0\}$ es cerrado pero no es abierto.
- (d) La familia $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \neq x_0\} \cup \{X \setminus F : F \subseteq X \text{ finito}\}$ es una base para $\langle X, \tau \rangle$.
- (e) Para cada $A \subseteq X$,

$$\overline{A} = \begin{cases} A & \text{si } A \text{ es finito} \\ A \cup \{x_0\} & \text{si } A \text{ es infinito} \end{cases}$$

Ejercicio 1.42. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de X . Sea $D \subseteq X$. Probar que D es denso en X si y sólo si para cada abierto básico $B \in \mathcal{B}$ no vacío se tiene que $B \cap D \neq \emptyset$.

Ejercicio 1.43. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de X . Sea $A \subseteq X$. Probar que un punto $x_0 \in X$ es punto de acumulación de A si y sólo si para cada $B \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in B$ se tiene que $B \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Ejercicio 1.44. Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$. Probar que:

- (1) Si $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B'$.
- (2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
- (3) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.
- (4) A es cerrado de X si y sólo si $A' \subseteq A$.

Ejercicio 1.45. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Probar que

$$x \in A' \iff x \in \overline{A - \{x\}}.$$

Ejercicio 1.46. Sea X un conjunto infinito y sea τ_{cof} la topología cofinita sobre X . Probar que $\langle X, \tau_{cof} \rangle$ no es un espacio Hausdorff.

Ejercicio 1.47 (Operador de clausura Kuratowski). Sea X un conjunto. Sea $\overline{\cdot}^K: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ una operación que cumple los siguientes postulados: para todos $A, B \subseteq X$:

- (K1) $\overline{A \cup B}^K = \overline{A}^K \cup \overline{B}^K$.
- (K2) Si A es vacío o consta de un sólo punto, $\overline{A}^K = A$.
- (K3) $\overline{\overline{A}^K}^K = \overline{A}^K$.

Probar las siguientes propiedades:

- (a) Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A}^K \subseteq \overline{B}^K$.
- (b) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i}^K \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}^K$.
- (c) Si A es finito, entonces $\overline{A}^K = A$.
- (d) $A \subseteq \overline{A}^K$.
- (e) $\overline{X}^K = X$.

Sea $\mathcal{C}_K := \{A \subseteq X : \overline{A}^K = A\}$. Probar que la familia $\tau_K := \{U \subseteq X : U^c \in \mathcal{C}_K\}$ es una topología sobre X .

(Indicación: Utilice el Ejercicio 1.31.)

Interior y frontera

Ejercicio 1.48. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Probar que A° (el interior de A) es el mayor abierto incluido en A .

Ejercicio 1.49. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Sea $x \in X$. Probar que:

- (1) $x \in A^\circ$ si y sólo si existe un U abierto tal que $x \in U \subseteq A$.
- (2) Si el espacio X tiene una base $\mathcal{B}$, entonces

$$x \in A^\circ \text{ si y sólo si existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq A.$$

Ejercicio 1.50. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base para X . Probar que

$$A^\circ = \bigcup \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}.$$

Ejercicio 1.51. Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subseteq X$. Probar las siguientes propiedades.

- (a) $A^\circ \subseteq A$.
- (b) A es abierto si y sólo si $A = A^\circ$.
- (c) $(A^\circ)^\circ$.
- (d) Si $A \subseteq B$, entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.
- (e) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Ejercicio 1.52. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Probar que:

- (a) Si A es abierto, entonces $A \subseteq (\overline{A})^\circ$.
- (b) Si A es cerrado, entonces $\overline{A}^\circ \subseteq A$.

Ejercicio 1.53. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces

$$\overline{A^c} = (A^\circ)^c \quad \text{y} \quad (A^c)^\circ = (\overline{A})^c.$$

Ejercicio 1.54. Sea X un espacio y sea Y un subespacio abierto de X . Sea $A \subseteq Y$. Probar que

$$A^{\circ^Y} = A^\circ \cap Y.$$

Ejercicio 1.55. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Probar las siguientes propiedades.

- (a) $\text{Fr}(A)$ es cerrado.
- (b) A es abierto y cerrado si y sólo si $\text{Fr}(A) = \emptyset$.
- (c) $x \in \text{Fr}(A)$ si y sólo si para cada entorno U de x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A^c \neq \emptyset$.
- (d) $\overline{A} = A^\circ \cup \text{Fr}(A)$.

Ejercicio 1.56. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base para X . Sea $A \subseteq X$. Probar que $x \in \text{Fr}(A)$ si y sólo si para todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ se tiene que $B \cap A \neq \emptyset$ y $B \cap A^c \neq \emptyset$.

Ejercicio 1.57. Sea $A = [0, 1)$. Hallar el interior y la frontera de A en los espacios $\mathbb{R}_u$, $\mathbb{R}_S$, y $\mathbb{R}_K$.

Funciones continuas

Ejercicio 1.58. Probar que toda función constante es continua.

Ejercicio 1.59. Sea X un conjunto con la topología indiscreta, es decir, los únicos abiertos de X son $\emptyset$ y X . Probar que una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}_u$ es continua si y sólo si f es constante.

Ejercicio 1.60. Sean X e Y espacios topológicos, y sea $\mathcal{S}$ una subbase de Y . Probar que una función $f: X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si $f^{-1}(S)$ es abierto de X para todo $S \in \mathcal{S}$.

Ejercicio 1.61. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (I) f es continua.
- (II) Para todo $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

Ejercicio 1.62. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Sea $\mathcal{C}$ una base del espacio Y . Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (I) f es continua.
- (II) Para todo $x \in X$ y para cada $C \in \mathcal{C}$ tal que $f(x) \in C$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subseteq C$.

Ejercicio 1.63. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Probar que f es abierta si y sólo si la función inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ es continua.

Ejercicio 1.64. Probar que:

- (a) Todo intervalo abierto (a, b) es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$, ambos como subespacios de $\mathbb{R}_u$.
- (b) Cualquier par de intervalos abiertos (a, b) y (c, d) son homeomorfos, ambos como subespacios de $\mathbb{R}_u$.
- (c) Cualquier intervalo abierto (a, b) (como subespacio de $\mathbb{R}_u$) es homeomorfo al espacio $\mathbb{R}_u$.

Ejercicio 1.65. Sea Y un espacio topológico y sea X un conjunto. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Probar que

$$\tau = \{U \subseteq X : f(U) \text{ es un abierto de } Y\}$$

es una topología sobre X y f es de hecho un homeomorfismo de X sobre Y .

Ejercicio 1.66. Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Sea $x_0 \in X$. Probar que la función $f: X' \rightarrow Y'$ es un homeomorfismo entre los subespacios $X' := X - \{x_0\}$ e $Y' = Y - \{f(x_0)\}$.

Ejercicio 1.67 (Lema del Pegamento). Sean X e Y espacios topológicos. Sean A y B cerrados de X tal que $X = A \cup B$. Sean $f: A \rightarrow Y$ y $g: B \rightarrow Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces la función $h: X \rightarrow Y$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es continua.

Ejercicio 1.68. Sea X un espacio arbitrario. Sean $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ continuas.

(a) Probar que el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X .

(b) Sea $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Probar que h es continua. (Indicación: use el Lema del pegamento).

Ejercicio 1.69. (a) Sea Y un espacio Hausdorff. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ funciones continuas. Probar que

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

es cerrado.

(b) Aplicar el inciso (a) para probar que el conjunto $A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 1.70. Sea Y un espacio topológico y sea X un conjunto. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Probar que

$$\tau = \{U \subseteq X : f(U) \text{ es un abierto de } Y\}$$

es una topología sobre X y f es de hecho un homeomorfismo de X sobre Y .

Ejercicio 1.71. Sea X un conjunto infinito y sea $x_0 \in X$. Sea

$$\tau = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\}.$$

Probar que:

- (a) τ es una topología sobre X .
- (b) Para todo $x \in X$ tal que $x \neq x_0$, el conjunto $\{x\}$ es ambo abierto y cerrado.
- (c) El conjunto $\{x_0\}$ es cerrado pero no es abierto.
- (d) La familia $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \neq x_0\} \cup \{X \setminus F : F \subseteq X \text{ finito}\}$ es una base para $\langle X, \tau \rangle$.
- (e) Para cada $A \subseteq X$,

$$\overline{A} = \begin{cases} A & \text{si } A \text{ es finito} \\ A \cup \{x_0\} & \text{si } A \text{ es infinito} \end{cases}$$

Ejercicio 1.72. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$.

- (a) Probar que $\tau = \{E_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$.
- (b) Determinar todos los subconjuntos cerrados de $\langle \mathbb{N}, \tau \rangle$.
- (c) Para los conjuntos $A = \{7, 24, 36, 85\}$ y $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$, hallar sus clausuras e interiores.
- (d) Encontrar los puntos de acumulación del conjunto $C = \{4, 13, 22, 34\}$.
- (e) Determinar los subconjuntos D de $\mathbb{N}$ que son densos en $\mathbb{N}$, es decir, que $\overline{D} = \mathbb{N}$.
- (f) ¿Es el espacio $\langle \mathbb{N}, \tau \rangle$ Hausdorff?

Ejercicio 1.73. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base para X . Probar que

$$A^\circ = \bigcup \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}.$$

Ejercicio 1.74. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre un conjunto X . Sea $f: X \rightarrow X$ la función identidad (es decir, $f(x) = x, \forall x \in X$). Probar que $f: \langle X, \tau_1 \rangle \rightarrow \langle X, \tau_2 \rangle$ es continua si y sólo si τ_1 es más fina que τ_2 .

Ejercicio 1.75. (a) Probar que toda función constante es continua.

(b) Probar que si $f: X \rightarrow Y$ es continua y A es un subespacio de X , entonces la función restricción $f|_A: A \rightarrow Y$ ($f|_A(x) = f(x)$ para todo $x \in A$) es continua.

Ejercicio 1.76. Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (con las topologías usuales) dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Probar que la función f es continua, abierta, y no es cerrada.

Ejercicio 1.77. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) f es continua.

(II) Para todo $B \subseteq Y, f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

Ejercicio 1.78. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) f es continua.

(II) Para todo $B \subseteq Y, \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

Ejercicio 1.79. Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Probar que:

(a) f es abierta si y sólo si para cada $A \subseteq X$, se tiene que $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$.

(b) f es cerrada si y sólo si para cada $A \subseteq X$, se tiene que $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Ejercicio 1.80. (a) Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. Probar que $\tau_{x_0} = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X .

(b) Sea $\tau_1 = \{(q, \infty) : q \in \mathbb{Q}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, ¿Es τ' una topología sobre $\mathbb{R}$?

(c) Sea $\tau_2 = \{(x, \infty) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Probar que τ es una topología sobre $\mathbb{R}$. Probar que $\mathcal{B} = \{(q, \infty) : q \in \mathbb{Q}\}$ es una base de la topología τ_2 .

Ejercicio 1.81. Sea X un conjunto y $x_0 \in X$.

(a) Probar que $\tau_{x_0} = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X .

- (b) Determinar la colección de todos los subconjuntos cerrados de $\langle X, \tau_{x_0} \rangle$.
- (c) Sea $A \subseteq X$ no vacío. Hallar la clausura de A .
- (d) Sea $A \subseteq X$. Hallar el interior de A .
- (e) Para cada $A \subseteq X$, hallar la frontera de A .

Ejercicio 1.82. (a) Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $D \subseteq X$ se llama *denso en X* si $\overline{D} = X$. Probar que para todo abierto no vacío U , se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$.

- (b) Sea Y un espacio Hausdorff, y sean $f, g: X \rightarrow Y$ dos funciones continuas. Sea D un subconjunto denso en X . Probar que si $f(d) = g(d)$ para todo $d \in D$, entonces $f = g$.

Capítulo 2

Espacios producto y espacios cocientes

2.1. La topología producto (caso finito)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $X_1, \dots, X_n$ conjuntos arbitrarios. Recordemos que el producto cartesiano de los conjuntos $X_1, \dots, X_n$ se define por:

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i = 1, \dots, n\}.$$

Es decir, el producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$ es el conjunto de todas las n -uplas tal que en la i -ésima coordenada hay un elemento del conjunto X_i , para cada $i = 1, \dots, n$. En particular, el producto cartesiano de dos conjuntos X e Y es

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

Sean $X_1, \dots, X_n$ conjuntos arbitrarios. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, se define la función proyección $\pi_k: \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_k$ por:

$$\pi_k(x_1, \dots, x_n) = x_k.$$

Ahora veremos cómo definir una topología sobre un producto cartesiano (finito) $X_1, \dots, X_n$.

Proposición 2.1

Sean $\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle$ espacios topológicos. Entonces la colección

$$\mathcal{B}_P := \{U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \in \tau_i, i = 1, \dots, n\} \quad (2.1)$$

es una base para una topología sobre $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Demostración. Debemos comprobar que se cumplen las condiciones (B1) y (B2) de la Proposición 1.19.

(B1) Observemos que $X_1 \times \cdots \times X_n \in \mathcal{B}_P$. Entonces se cumple trivialmente (B1).

(B2) Sean $B_1 = U_1 \times \cdots \times U_n$ y $B_2 = V_1 \times \cdots \times V_n$ miembros de $\mathcal{B}_P$, y sea $\bar{x} \in B_1 \cap B_2$.

Tenemos que

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n).$$

Cada $U_i \cap V_i$ es un abierto de X_i . Entonces, por definición de $\mathcal{B}_P$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_P$. Entonces, (B2) se cumple trivialmente. ■

Definición 2.2

Sean $\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle$ espacios topológicos. Sea $\mathcal{B}_P$ como en (2.1). Llamaremos a la topología $\tau_{\mathcal{B}_P}$ generada por la base $\mathcal{B}_P$ la **topología producto sobre** $X_1 \times \cdots \times X_n$. Por simplicidad denotaremos a la topología producto por τ_P . Llamaremos al espacio $\left\langle \prod_{i=1}^n X_i, \tau_P \right\rangle$ el **espacio producto**.

Proposición 2.3

Sean $\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle$ espacios topológicos. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, la función proyección $\pi_k: \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_k$ es continua. Además, la topología producto τ_P sobre $X_1 \times \cdots \times X_n$ es la topología más gruesa tal que todas las funciones proyecciones $\pi_1, \dots, \pi_n$ son continuas.

Demostración. Probemos primero que cada función proyección es continua. Sea $k \in \{1, \dots, n\}$ y probemos que $\pi_k: \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_k$ es continua. Sea U_k un abierto de X_k . Se puede comprobar que $\pi_k^{-1}(U_k) = X_1 \times \cdots \times U_k \times \cdots \times X_n$. Por definición de $\mathcal{B}_P$, $\pi_k^{-1}(U_k) = X_1 \times \cdots \times U_k \times \cdots \times X_n \in \mathcal{B}_P$. Con lo cual $\pi_k^{-1}(U_k)$ es abierto del espacio producto $\prod_{i=1}^n X_i$.

Ahora veamos que la topología producto τ_P es la más gruesa para la cual todas las funciones proyecciones son continuas. Sea τ una topología sobre el producto cartesiano $\prod_{i=1}^n X_i$ tal que para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ las funciones proyecciones $\pi_k: \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_k$ son continuas. Debemos probar que $\tau_P \subseteq \tau$. Ya que $\mathcal{B}_P$ es una base de τ_P , es suficiente mostrar que $\mathcal{B}_P \subseteq \tau$. Sea $U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{B}_P$. Se puede comprobar que $U_1 \times \cdots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n)$. Por hipótesis, cada $\pi_i^{-1}(U_i) \in \tau$. Entonces $U_1 \times \cdots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n) \in \tau$. ■

Proposición 2.4

Sean $\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle$ espacios topológicos. Si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{B}_i$ es una base de τ_i , entonces la colección

$$\mathcal{B} := \{B_1 \times \cdots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}_i, \text{ para } i = 1, \dots, n\} \quad (2.2)$$

es una base para la topología producto τ_p .

Demostración. Sea W un abierto del espacio producto $\prod_{i=1}^n X_i$ y sea $\bar{x} \in W$. Por ser $\mathcal{B}_p$ base de τ_p , existe $U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{B}_p$ tal que $\bar{x} \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq W$. Luego, para cada i , U_i es abierto de X_i y $x_i \in U_i$. Por ser $\mathcal{B}_i$ base de τ_i , existe un abierto B_i de X_i tal que $x_i \in B_i \subseteq U_i$. Entonces

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n \subseteq U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq W$$

y $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base de τ_p . ■

Ejemplo 2.5. Consideremos el espacio $\mathbb{R}_u$. Sea $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ el espacio producto. Sabemos que el espacio $\mathbb{R}_u$ tiene a $\mathcal{B}_u = \{(a, b) : a < b\}$ como base. Entonces, por la proposición anterior tenemos que la colección

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \times (c, d) : a < b \text{ y } c < d\}$$

es una base para el espacio producto. Ahora podemos comprobar gráficamente que las bolas abiertas son conjuntos abiertos del espacio producto $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$. Véase la Figura ???. Es más, podemos comprobar que la colección de todas las bolas abiertas forman otra base para el espacio producto $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$. Sea U un abierto del espacio $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ y $(x, y) \in U$. Por lo anterior, existe un abierto básico $(a, b) \times (c, d)$ tal que $(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subseteq U$. Entonces, tomando una bola $B((x, y), r)$ con centro en el punto (x, y) y un radio adecuado r , obtenemos que $(x, y) \in B((x, y), r) \subseteq (a, b) \times (c, d) \subseteq U$ (véase la Figura ??). Por lo tanto, la colección de todas las bolas abiertas forma una base para el espacio producto $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$. ■

Proposición 2.6

Sean $\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle$ espacios topológicos. La colección

$$\mathcal{S}_p := \bigcup_{i=1}^n \left\{ \pi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i \right\} \quad (2.3)$$

es una subbase para la topología producto τ_p .

Demostración. Sea W un abierto del espacio producto $\prod_{i=1}^n X_i$ y sea $\bar{x} \in W$. Por ser $\mathcal{B}_P$ base del espacio producto, existe $U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{B}_P$ tal que $\bar{x} \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq W$. Ahora, teniendo en cuenta que

$$U_1 \times \cdots \times U_n = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n)$$

tenemos que existen $\pi_1^{-1}(U_1), \dots, \pi_n^{-1}(U_n) \in \mathcal{S}_P$ tal que

$$\bar{x} \in \pi_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n) \subseteq W.$$

Por lo tanto, $\mathcal{S}_P$ es subbase de τ_P . ■

Sean $\langle X_1, \tau_1 \rangle, \dots, \langle X_n, \tau_n \rangle$ espacios topológicos. Es importante observar lo siguiente.

- Si $U_i^1, \dots, U_i^m \in \tau_i$, entonces $U_i^1 \cap \cdots \cap U_i^m \in \tau_i$ y

$$\pi_i^{-1}(U_i^1) \cap \cdots \cap \pi_i^{-1}(U_i^m) = \pi_i^{-1}(U_i^1 \cap \cdots \cap U_i^m).$$

- La base $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_P}$ generada por la subbase $\mathcal{S}_P$ (véase la Proposición 1.16) queda como

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}_P} = \{\pi_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n) : U_i \in \tau_i\}.$$

- La base $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_P}$ coincide con la base $\mathcal{B}_P$. Es decir,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}_P} = \{\pi_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(U_n) : U_i \in \tau_i\} = \{U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \in \tau_i\}.$$

2.2. La topología producto (caso general)

Sea I un conjunto arbitrario. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos indexada por el conjunto I . Recordemos que el producto cartesiano de la familia $\{X_i : i \in I\}$ se define por

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ \bar{x} : \bar{x} : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \text{ y } \bar{x}(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}. \quad (2.4)$$

Para cada $i \in I$, denotaremos $x_i := \bar{x}(i)$ para cada $\bar{x} \in \prod_{i \in I} X_i$. Diremos que el valor o el elemento de la i -ésima coordenada del elemento $\bar{x} \in \prod_{i \in I} X_i$ es $\bar{x}(i) = x_i$. Para cada $j \in I$, se define la función proyección

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j \quad \text{por} \quad \pi_j(\bar{x}) = \bar{x}(j) = x_j.$$

Definición 2.7

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos indexada por el conjunto I . Definimos la colección $\mathcal{S}_P$ de subconjuntos del producto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ por:

$$\mathcal{S}_P = \{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I \text{ y } U_i \text{ es un abierto de } X_i\}. \quad (2.5)$$

La topología sobre $\prod X_i$ generada por la subbase $\mathcal{S}_P$ (véase en la página 16) es llamada la **topología producto** y denotada por τ_P . Llamaremos al espacio $\left\langle \prod_{i \in I} X_i, \tau_P \right\rangle$ el **espacio producto**.

Proposición 2.8

La topología producto sobre $\prod_{i \in I} X_i$ tiene como base a la colección

$$\mathcal{B}_P := \{\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) : i_1, \dots, i_n \in I \text{ y cada } U_{i_k} \text{ es un abierto de } X_{i_k}\}.$$

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 1.16. ■

Observemos que para todo elemento $\bar{x} \in \prod_{i \in I} X_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{x} \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) &\iff \bar{x} \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \& \dots \& \bar{x} \in \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \\ &\iff x_{i_1} \in U_{i_1} \& \dots \& x_{i_n} \in U_{i_n}. \end{aligned}$$

Esto nos sugiere otra posible notación para los conjuntos $\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$:

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) = \prod \{X_i : i \notin \{i_1, \dots, i_n\}\} \times U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n}.$$

Ejemplo 2.9. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $X_i = \mathbb{N}$ con la topología discreta. Sea $X := \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ el espacio producto. Entonces, X no es discreto. Es decir, la propiedad de ser discreto no se preserva por productos. En efecto, Supongamos que el conjunto unitarios $\{\bar{x}\}$, para cualquier $\bar{x}$, es abierto. Como $\bar{x} \in \{\bar{x}\}$, existen $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ y $U_{i_1}, \dots, U_{i_n} \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\bar{x} \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subseteq \{\bar{x}\}.$$

Lo cual es absurdo, pues el conjunto $\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ contiene infinitos elementos.

Proposición 2.10

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $j \in I$, la función proyección $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ es continua. Además, la topología producto τ_P es la más gruesa para la cual todas las funciones proyecciones son continuas.

Demostración. Es directo del hecho que la topología producto está generada por la subbase $\mathcal{S}_P = \{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I \text{ y } U_i \text{ es un abierto de } X_i\}$. ■

Observación 2.11. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Es importante, notar que el producto arbitrario $\prod U_i$ de abiertos U_i de X_i no es necesariamente un abierto del espacio producto $\prod X_i$. Si consideramos la colección $\mathcal{B}_c = \{\prod U_i : U_i \text{ es abierto de } X_i \text{ para cada } i\}$, entonces $\mathcal{B}_c$ es **una** base para una topología, distinta de la topología producto definida en la Definición 2.7. La elección de considerar la topología producto como en la Definición 2.7 es fundamentada en dos hechos importantes:

1. Es que la topología producto es la más gruesa que hace a todas las funciones proyecciones continuas.
2. Se cumple el Teorema de Tychonoff: el producto de espacios compactos es compacto (esto lo veremos en el Capítulo 5).

Proposición 2.12

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Supongamos que para cada $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ es una base para el espacio X_i . Entonces, la colección

$$\mathcal{B} := \{\pi_{i_1}^{-1}(B_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(B_{i_n}) : i_1, \dots, i_n \in I \text{ y } B_{i_1} \in \mathcal{B}_{i_1}, \dots, B_{i_n} \in \mathcal{B}_{i_n}\}$$

es una base para la topología producto.

Demostración. Sea W un abierto del espacio producto $\prod X_i$ y sea $\bar{x} \in W$. Por la Proposición 2.8, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ y U_{i_k} abierto de X_{i_k} tal que

$$\bar{x} \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subseteq W.$$

Para cada $j \in \{i_1, \dots, i_n\}$, tenemos que $\pi_j(\bar{x}) \in U_j$ siendo U_j abierto de X_j . Entonces, por ser $\mathcal{B}_j$ base de X_j , existe un $B_j \in \mathcal{B}_j$ tal que $\pi_j(\bar{x}) \in B_j \subseteq U_j$. Entonces, $\bar{x} \in \pi_j^{-1}(B_j) \subseteq \pi_j^{-1}(U_j)$ para todo $j \in \{i_1, \dots, i_n\}$. Con lo cual,

$$\bar{x} \in \pi_{i_1}^{-1}(B_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(B_{i_n}) \subseteq \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subseteq W. \quad \blacksquare$$

Proposición 2.13

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Sean $A_i \subseteq X_i$ para cada $i \in I$. Entonces,

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}. \quad (2.6)$$

Demostración. ($\subseteq$) Sea $\bar{x} \in \overline{\prod A_i}$. Sea $j \in I$. Probemos que $x_j \in \overline{A_j}$. Sea U_j un abierto de X_j tal que $x_j \in U_j$. Entonces, tenemos que $\bar{x} \in \pi_j^{-1}(U_j)$. Por ser $\pi_j^{-1}(U_j)$ abierto del espacio producto, tenemos que $\prod A_i \cap \pi_j^{-1}(U_j) \neq \emptyset$. Esto implica que $A_j \cap U_j \neq \emptyset$. Entonces $x_j \in \overline{A_j}$. Como el índice j es arbitrario, obtenemos que $\bar{x} \in \prod \overline{A_i}$.

($\supseteq$) Sea $\bar{x} \in \prod \overline{A_i}$. Sean $i_1, \dots, i_n \in I$, y U_{i_k} abierto de X_{i_k} tal que

$$\bar{x} \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}).$$

$$\implies x_{i_1} \in U_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in U_{i_n}$$

$$\implies A_{i_1} \cap U_{i_1} \neq \emptyset, \dots, A_{i_n} \cap U_{i_n} \neq \emptyset$$

$$\implies a_{i_1} \in A_{i_1} \cap U_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in A_{i_n} \cap U_{i_n}.$$

Para cada índice $i \in I$ tal que $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$, sea $y_i \in A_i$ arbitrario. Ahora definimos el elemento $\bar{y} \in \prod X_i$ por:

$$\bar{y}(i) = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in \{i_1, \dots, i_n\} \\ y_i & \text{si } i \notin \{i_1, \dots, i_n\}. \end{cases}$$

Entonces es claro que $\bar{y} \in \prod A_i \cap (\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}))$. Por lo tanto, $\bar{x} \in \overline{\prod A_i}$. ■

El siguiente resultado será de mucha utilidad para probar que ciertas funciones que tienen como rango un espacio producto son continuas.

Proposición 2.14

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos indexada por el conjunto I y sea Y un espacio topológico. Una función $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ es continua si y sólo si para cada $i \in I$ la función $\pi_i \circ f: Y \rightarrow X_i$ es continua.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $f: Y \rightarrow \prod X_i$ es continua. Sea $j \in I$. Debemos probar que la función $\pi_j \circ f: Y \rightarrow X_j$ es continua. Sea U_j un abierto de X_j . Como f es continua obtenemos que $(\pi_j \circ f)^{-1}(U_j) = f^{-1}(\underbrace{\pi_j^{-1}(U_j)}_{\text{abierto de } \prod X_i})$ es abierto de Y . Por lo tanto, $\pi_j \circ f$ es continua.

($\Leftarrow$) Supongamos que para cada índice $i \in I$ la función $\pi_i \circ f: Y \rightarrow X_i$ es continua. Debemos probar que la función $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ es continua. Vamos a usar el hecho que $\mathcal{B}_p$ es una base de la topología producto. Sea $B = \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ un básico del espacio

producto $\prod X_i$. Ahora, como cada función $\pi_i \circ f$ es continua, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1} \left(\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \right) \\ &= f^{-1} \left(\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \right) \cap \cdots \cap f^{-1} \left(\pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \right) \\ &= \underbrace{(\pi_{i_1} \circ f)^{-1}(U_{i_1})}_{\text{abierto de } \prod X_i} \cap \cdots \cap \underbrace{(\pi_{i_n} \circ f)^{-1}(U_{i_n})}_{\text{abierto de } \prod X_i} \end{aligned}$$

es una intersección finita de abiertos del espacio producto, y así un abierto de $\prod X_i$. Por lo tanto, f es continua. ■

2.3. La topología cociente

FALTAN EJEMPLOS Y COMPLETAR LAS PRUEBAS

Sea X un espacio topológico. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X . Denotamos por $X/\sim$ al conjunto cociente de X por $\sim$. Para cada $x \in X$, denotamos por $[x]$ a la clase de equivalencia de x con respecto a $\sim$. Esto es, $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$. Entonces, $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$. Sea $\pi: X \rightarrow X/\sim$ la función canónica de $\sim$, es decir, para cada $x \in X$, $\pi(x) = [x]$. Sabemos que esta es una función sobreyectiva. Ahora estamos listos para definir una topología sobre $X/\sim$.

Proposición 2.15

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X y sea π función canónica de $\sim$. Entonces, la colección

$$\tau_{\sim} := \{W \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(W) \in \tau\} \quad (2.7)$$

es una topología sobre $X/\sim$.

Demostración. Es consecuencia del hecho que la función inversa π^{-1} preserva uniones e intersecciones. Se dejan los detalles a cargo del lector. ■

Definición 2.16

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X . Llamaremos a la topología $\tau_{\sim}$ la **topología cociente** de X por $\sim$. Y llamaremos al espacio $\langle X/\sim, \tau_{\sim} \rangle$ el **espacio cociente**.

Los siguientes dos resultados pueden ser considerados duales a las proposiciones 2.10 y

2.14, respectivamente.

Proposición 2.17

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X . Entonces la topología cociente $\tau_{\sim}$ es la topología más fina para la cual la función canónica $\pi: X \rightarrow X/\sim$ es continua.

Demostración. A cargo del lector. ■

Proposición 2.18

Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X y sea π función canónica de $\sim$. Sea Y espacio topológico arbitrario. Entonces, una función $f: X/\sim \rightarrow Y$ es continua si y sólo si la función $f \circ \pi: X \rightarrow Y$ es continua.

Demostración. A cargo del lector. ■

Proposición 2.19

Sean X e Y espacios topológicos. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre X tal que f es constante sobre cada clase de equivalencia^a. Entonces, existe una función continua $g: X/\sim \rightarrow Y$ tal que $f = g \circ \pi$.

^aEsto es, si $x_1 \sim x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$.

Demostración. En breve. ■

Ejercicios propuestos

Espacios productos

Ejercicio 2.1. Sean X_1 y X_2 espacios topológicos. Probar que las funciones proyecciones $\pi_1: X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ y $\pi_2: X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ son funciones abiertas.

Ejercicio 2.2. Sea $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ y } y = \frac{1}{x}\}$, el cual es un cerrado del espacio producto $\mathbb{R}^2$. Probar que la proyección $\pi_1(F)$ no es un cerrado de $\mathbb{R}$. ¿Cuál es la conclusión que saca de esto?

Ejercicio 2.3. Sea X un espacio topológico. Sea $b \notin X$. Probar que $X \cong X \times \{b\}$.
(Notar que la única topología posible sobre $\{b\}$ es $\{\emptyset, \{b\}\}$).

Ejercicio 2.4. Sean X e Y espacios topológicos.

- (a) Sea $y_0 \in Y$. Considerar el subespacio $X \times \{y_0\}$ del espacio producto $X \times Y$. Describir los abiertos básicos del subespacio $X \times \{y_0\}$.
- (b) Probar que X es homeomorfo a un subespacio del espacio producto $X \times Y$.

Ejercicio 2.5. Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios topológicos y sean $A_i \subseteq X_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Probar que

- (a) $(A_1 \times \dots \times A_n)^\circ = A_1^\circ \times \dots \times A_n^\circ$.
- (b) $Fr(A_1 \times A_2) = (Fr(A_1) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times Fr(A_2))$.
- (c) ¿Cómo generalizaría el apartado (b) para $Fr(A_1 \times \dots \times A_n)$? ¿Puede dar una prueba de su afirmación?

Ejercicio 2.6. Sean X e Y espacios topológico y sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Sea $F: X \rightarrow X \times Y$ definida por $F(x) = (x, f(x))$. Probar que f es continua si y sólo si F es continua.

Ejercicio 2.7. Sea X un espacio topológico y considere la diagonal Δ de $X \times X$, esto es,

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X.$$

- (a) Probar que Δ es cerrado en $X \times X$ si y sólo si X es un espacio Hausdorff.
- (b) Probar que Δ es abierto en $X \times X$ si y sólo si X es discreto.

Ejercicio 2.8. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia (indexada) de espacios topológicos. Sea $\alpha \in I$. Probar que el espacio X_α es homeomorfo a un subespacio del espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$.

Ejercicio 2.9. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Considerar la siguiente colección de subconjuntos del producto cartesiano $X := \prod_{i \in I} X_i$:

$$\mathcal{B}_c := \left\{ \prod_{i \in I} U_i : \text{para cada } i \in I, U_i \text{ es un abierto de } X_i \right\}.$$

- (a) Probar que $\mathcal{B}_c$ forma una base para una topología sobre X . La topología generada por la base $\mathcal{B}_c$ es llamada la **topología de cajas**.
- (b) Comparar la topología producto con la topología de cajas.
- (c) Probar que si I es finito, entonces la topología por cajas $\tau_{\mathcal{B}_c}$ coincide con la topología producto sobre X .

(d) Probar que si cada espacio X_i es discreto, entonces la topología por cajas sobre X es la discreta.

Ejercicio 2.10. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Probar que para cada $j \in I$, la función proyección $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ es una función abierta.

Ejercicio 2.11. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios topológicos. Probar que si el espacio producto $X = \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es de Hausdorff, entonces para cada índice $\alpha \in \Gamma$, el espacio X_α es de Hausdorff.

Ejercicio 2.12. Considerar $\mathbb{R}$ con la topología usual. Considerar el espacio producto $\mathbb{R}^\omega$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el subespacio

$$\widehat{\mathbb{R}}^n = \{\bar{x} : \bar{x}(i) = 0 \text{ para todo } i > n\}$$

de $\mathbb{R}^\omega$. Probar que los espacios $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos.

Ejercicio 2.13. Sean $\{\langle X_i, \tau_i \rangle\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Probar que una sucesión $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos del espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$ converge al punto $\bar{x}_0$ si y sólo si para cada función proyección $\pi_\alpha : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_\alpha$, la sucesión $\pi_\alpha(\bar{x}_1), \pi_\alpha(\bar{x}_2), \pi_\alpha(\bar{x}_3), \dots$ converge al punto $\pi_\alpha(\bar{x}_0)$ en el espacio X_α .

Ejercicio 2.14. Sea $\mathbb{R}^\infty$ el subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado por todas las sucesiones que son *finalmente cero*, esto es, todas las sucesiones $(x_1, x_2, \dots)$ tales que $x_i \neq 0$ sólo para un número finito de valores de i . Probar que $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\omega$.

Ejercicio 2.15. Sean X, Y y Z espacios topológicos.

- (a) Probar que si $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Z$ son funciones continuas, entonces la función $F : X \rightarrow Y \times Z$ definida por $F(x) = (f(x), g(x))$ es continua.
- (b) Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}_u$ funciones continuas. Teniendo en cuenta que las funciones suma $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, producto $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y valor absoluto $|| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas, probar que las funciones $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por: para cada $x \in X$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad |f|(x) = |f(x)|$$

son continuas. Es decir, la suma, producto y valor absoluto de funciones continuas a valores reales son continuas.

Espacios cocientes

Ejercicio 2.16. Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ subespacio de $\mathbb{R}$. Sea $\sim$ la relación de equivalencia definida por: para cada $(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in X$,

$$(s_1, s_2) \sim (t_1, t_2) \iff s_2 = t_2.$$

Describir el espacio cociente $X/\sim$.

Ejercicio 2.17. Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios topológicos y sea $X = X_1 \times \dots \times X_n$ el espacio producto. Se define la relación de equivalencia $\sim$ sobre X por:

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 = y_1.$$

Probar que el espacio cociente $X/\sim$ es homeomorfo a X_1 .

Ejercicio 2.18. Sea X un espacio topológico. Se define la relación binaria $\sim$ sobre X como sigue:

$$x \sim y \iff (\forall U \text{ abierto})(x \in U \iff y \in U).$$

- (a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X .
- (b) Probar que la función canónica $\pi: X \rightarrow X/\sim$ es abierta.
- (c) Probar que si $[x] \neq [y]$, entonces existe un abierto U de X tal que $[x] \in \pi(U)$ y $[y] \notin \pi(U)$, o $[x] \notin \pi(U)$ y $[y] \in \pi(U)$.

Ejercicio 2.19. Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto de X . Se define la relación binaria $\sim$ sobre X por:

$$x \sim y \iff (x = y) \text{ o } (x, y \in A).$$

Probar que:

- (a) $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X .
- (b) Para cada $a \in A$, $[a] = A$.
- (c) Para cada $x \notin A$, $[x] = \{x\}$.
- (d) Para cada abierto U de X tal que $U \cap A = \emptyset$, se tiene que $\pi(U)$ es un abierto del espacio cociente $X/\sim$.

Capítulo 3

Espacios topológicos metrizablebles

En este capítulo asumimos que el lector está familiarizado con el concepto de métrica o distancia sobre un conjunto y con respecto a resultados básicos sobre espacios métricos. Dirigimos al lector a [5, 2] para recordar estos conceptos.

3.1. Espacios métrizablebles

Comencemos recordando qué es una métrica o distancia sobre un conjunto.

Definición 3.1

Una **distancia** o **métrica** sobre un conjunto X es una función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisface los siguientes postulados:

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular), $\forall x, y, z \in X$.

Diremos que $\langle X, d \rangle$ es un **espacio métrico** si d es una distancia sobre X .

Sea d una distancia sobre un conjunto X . Dado $\epsilon > 0$ y $x \in X$ se define el conjunto

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}. \quad (3.1)$$

Los conjuntos $B_d(x, \epsilon)$ se denominan **bolas abiertas** con centro en x y radio ϵ . Veamos algu-

nas propiedades útiles sobre bolas abiertas.

Lema 3.2

Sea d una distancia sobre un conjunto X .

- (1) $x \in B_d(x, \epsilon)$.
- (2) Si $\epsilon_1 < \epsilon_2$, entonces $B_d(x, \epsilon_1) \subseteq B_d(x, \epsilon_2)$.
- (3) Si $y \in B_d(x, \epsilon)$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x, \epsilon)$.

Demostración. A cargo del lector. ■

Proposición 3.3

Sea d una distancia sobre un conjunto X . Entonces, la colección

$$\mathcal{B}_d := \{B_d(x, \epsilon) : x \in X \text{ y } \epsilon > 0\} \quad (3.2)$$

es una base para una topología sobre X .

Demostración. Hay que comprobar que las condiciones (B1) y (B2) (Proposición 1.19) se cumplen para la colección $\mathcal{B}_d$.

(B1) Para cada $x \in X$, se tiene que $x \in B_d(x, 1) \in \mathcal{B}_d$.

(B2) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_d$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$. Como B_1 y B_2 son bolas abiertas, por la condición (3) el Lema 3.2, tenemos que existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que $B_d(x, \delta_1) \subseteq B_1$ y $B_d(x, \delta_2) \subseteq B_2$. Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, obtenemos por la condición (2) del Lema 3.2 que existe $B_3 := B_d(x, \delta)$ tal que

$$B_3 = B_d(x, \delta) \subseteq B_d(x, \delta_1) \cap B_d(x, \delta_2) \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Con lo cual se cumple (B2). ■

Definición 3.4

Sea d una distancia sobre un conjunto X . La topología τ_d generada por la base $\mathcal{B}_d$ (dada en (3.2)) es llamada la **topología métrica inducida por d** .

Sea d una distancia sobre un conjunto X . Entonces, por la definición de la topología métrica inducida por d y por el Lema 3.2, tenemos que

U es un abierto de τ_d si y sólo si para cada $x \in U$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon) \subseteq U$.

Definición 3.5

Un espacio topológico X es llamado **metrizable** si existe una distancia d sobre X que induce la topología de X .

En otras palabras,

Un espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$ es metrizable si y sólo si existe una distancia d sobre X tal que $\tau = \tau_d$.

Proposición 3.6

Sea X un espacio metrizable con distancia d . Se define la función $\hat{d}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ por $\hat{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Entonces, $\hat{d}$ es una distancia sobre X que induce la misma topología que d . Esto es, $\tau_{\hat{d}} = \tau_d$.

Demostración. Queda a cargo del lector verificar que $\hat{d}$ es una métrica sobre X . Para probar que $\tau_{\hat{d}} = \tau_d$ hacemos las siguientes observaciones las cuales quedan a cargo del lector comprobar:

1. Para cualquier distancia d' sobre X se tiene que la colección $\mathcal{B}_{d'}^{<1} = \{B_{d'}(x, \epsilon) : x \in X \text{ y } 0 < \epsilon < 1\}$ forma una base para la topología $\tau_{d'}$ (véase el Ejercicio 3.2).
2. Para cada $x \in X$ y para todo $0 < \epsilon < 1$ se tiene que $B_d(x, \epsilon) = B_{\hat{d}}(x, \epsilon)$.

Entonces, de las observaciones anteriores se deduce que las bases $\mathcal{B}_d^1 = \{B_d(x, \epsilon) : x \in X \text{ y } 0 < \epsilon < 1\}$ y $\mathcal{B}_{\hat{d}}^1 = \{B_{\hat{d}}(x, \epsilon) : x \in X \text{ y } 0 < \epsilon < 1\}$ coinciden. Por lo tanto, $\tau_d = \tau_{\hat{d}}$. ■

Proposición 3.7

Sean d y d' dos distancias sobre un conjunto X . Sean τ_d y $\tau_{d'}$ las topologías inducidas por d y d' , respectivamente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) $\tau_d \subseteq \tau_{d'}$.
- (2) $\forall x \in X \text{ y } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \epsilon)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Por (1), tenemos que $B_d(x, \epsilon) \in \tau_d \subseteq \tau_{d'}$. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \epsilon)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Vamos a utilizar la Proposición 1.14. Sea $B \in \mathcal{B}_d$ y $x \in B$. Entonces, sabemos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon) \subseteq B$. Entonces, por (2), existe un $\delta > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subseteq$

$B_d(x, \epsilon) \subseteq B$. Esto implica por la Proposición 1.14 que $\tau_d \subseteq \tau_{d'}$. ■

Sea $n \in \mathbb{N}$. La **distancia euclídea** sobre $\mathbb{R}^n$ se define por

$$d_e(\bar{x}, \bar{y}) = [(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{1/2} \quad (3.3)$$

para todos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. La **distancia del supremo** sobre $\mathbb{R}^n$ se define por

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \quad (3.4)$$

para todos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.8

Sea $n \in \mathbb{N}$. Las topologías sobre $\mathbb{R}^n$ inducidas por la distancia euclídea d_e y la distancia del supremo ρ coinciden con la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$ con la topología usual).

En otras palabras, el teorema anterior afirma que la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$ con su topología usual) es metrizable y está inducida por dos distancias distintas: la distancia euclídea y la distancia del supremo.

Demostración. Primero probamos que las topologías métricas τ_{d_e} y τ_ρ coinciden. Para esto observamos lo siguiente. Para todos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_e(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sqrt{n} \rho(\bar{x}, \bar{y}). \quad (3.5)$$

La primera desigualdad implica que para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, $B_{d_e}(\bar{x}, \epsilon) \subseteq B_\rho(\bar{x}, \epsilon)$. Y la segunda desigualdad implica que para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, $B_\rho(\bar{x}, \epsilon/\sqrt{n}) \subseteq B_{d_e}(\bar{x}, \epsilon)$. Entonces, por la Proposición 3.7, se obtiene que $\tau_{d_e} = \tau_\rho$.

Ahora probemos que la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$ coincide con la topología inducida por la distancia ρ . Es decir, probemos que $\tau_P = \tau_\rho$. Usaremos la Proposición 1.14. Sea $B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ un abierto básico de la topología producto y sea $\bar{x} \in B$. Entonces, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i < x_i < b_i$. Entonces, para cada i , existe un $\epsilon_i > 0$ tal que $x_i \in (x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subseteq (a_i, b_i)$. Sea $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. Entonces $\bar{x} \in B_\rho(\bar{x}, \epsilon) \subseteq B$. Entonces, por la Proposición 1.14, tenemos que $\tau_P \subseteq \tau_\rho$. Por otro lado, notemos que los abiertos básicos de la topología producto τ_P son de la forma $B_\rho(\bar{x}, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon)$, los cuales son abiertos de la topología producto. Es decir, tenemos que $\mathcal{B}_\rho \subseteq \tau_P$. Por lo tanto, $\tau_\rho \subseteq \tau_P$. ■

Teorema 3.9

Sea $\hat{d}$ la distancia usual acotada sobre $\mathbb{R}$. Esto es, $\hat{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Definimos la función $D: \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ por: para todos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^\omega$,

$$D(\bar{x}, \bar{y}) = \sup \left\{ \frac{\hat{d}(x_i, y_i)}{i} : i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Entonces, D es una distancia sobre $\mathbb{R}^\omega$ que induce la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$ ($\mathbb{R}$ con la topología usual).

Demostración. Primero comprobamos que la función D es una métrica. Sólo probamos la desigualdad triangular, y dejamos las condiciones restantes a cargo del lector. Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^\omega$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{\hat{d}(x_i, z_i)}{i} \leq \frac{\hat{d}(x_i, y_i)}{i} + \frac{\hat{d}(y_i, z_i)}{i} \leq D(\bar{x}, \bar{y}) + D(\bar{y}, \bar{z}).$$

Entonces, $D(\bar{x}, \bar{z}) \leq D(\bar{x}, \bar{y}) + D(\bar{y}, \bar{z})$.

Ahora probemos que la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$ es inducida por la métrica D . Es decir, probemos que $\tau_D = \tau_p$.

($\subseteq$) Sea $U \in \tau_D$ y $\bar{x} \in U$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_D(\bar{x}, \epsilon) \subseteq U$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Definimos el conjunto

$$V = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_N - \epsilon, x_N + \epsilon) \times \mathbb{R} \times \cdots$$

el cual es claramente un abierto básico del espacio producto $\mathbb{R}^\omega$ y $\bar{x} \in V$. Veamos que $V \subseteq B_D(\bar{x}, \epsilon)$. Para esto, notemos primero que para todo $\bar{y} \in \mathbb{R}^\omega$ se tiene que

$$\frac{\hat{d}(x_i, y_i)}{i} \leq \frac{1}{N} < \epsilon, \quad \forall i \geq N.$$

Luego, tenemos que

$$D(\bar{x}, \bar{y}) \leq \max \left\{ \frac{\hat{d}(x_1, y_1)}{1}, \dots, \frac{\hat{d}(x_N, y_N)}{N}, \frac{1}{N} \right\}.$$

Ahora, sea $\bar{y} \in V$, entonces $\frac{\hat{d}(x_i, y_i)}{i} \leq \frac{|x_i - y_i|}{i} < \frac{\epsilon}{i} \leq \epsilon$, $\forall i \leq N$. Entonces, $D(\bar{x}, \bar{y}) < \epsilon$, lo cual implica que $\bar{y} \in B_D(\bar{x}, \epsilon)$. Acabamos de probar que $\bar{x} \in V \subseteq B_D(\bar{x}, \epsilon) \subseteq U$. Por lo tanto, U es un abierto de la topología producto, esto es, $U \in \tau_p$.

($\supseteq$) Sea $U \in \tau_p$ y $\bar{x} \in U$. Por la Proposición 2.8, existen $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ y abiertos $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ de $\mathbb{R}$ tal que

$$\bar{x} \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subseteq U.$$

Luego, $x_{i_1} \in U_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in U_{i_n}$. Entonces, para cada $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$, existe un $\epsilon_i > 0$ (que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\epsilon_i < 1$) tal que $x_i \in (x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subseteq U_i$. Sea $\epsilon := \min \left\{ \frac{\epsilon_{i_1}}{i_1}, \dots, \frac{\epsilon_{i_n}}{i_n} \right\}$. Veamos que $B_D(\bar{x}, \epsilon) \subseteq U$. Sea $\bar{y} \in B_D(\bar{x}, \epsilon)$. Entonces

$$\frac{\widehat{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(\bar{x}, \bar{y}) < \epsilon$$

para todo i . Ahora, si $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$, tenemos que $\epsilon \leq \frac{\epsilon_i}{i}$. Con lo cual $\widehat{d}(x_i, y_i) < \epsilon_i (< 1)$. Usando el hecho que $\epsilon_i < 1$, tenemos que $|x_i - y_i| = \widehat{d}(x_i, y_i)$. Entonces $|x_i - y_i| < \epsilon_i$. Es decir, $y_i \in (x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i)$ para todo $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$. Entonces $y_i \in U_i$ para todo $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$. Lo cual implica que $\bar{y} \in U$. Así obtenemos que $\bar{x} \in B_D(\bar{x}, \epsilon) \subseteq U$. Por lo tanto, U es un abierto de la topología inducida por la métrica D , es decir, $U \in \tau_D$. ■

El teorema anterior afirma que la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$ ($\mathbb{R}$ con su topología usual) es metrizable y esta inducida por la distancia D .

Proposición 3.10: Lema de la sucesión

Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Si existe una sucesión de puntos de A que converge a x , entonces $x \in \bar{A}$. La recíproca se cumple si el espacio X es metrizable.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de la definición de convergencia y la caracterización de clausura. En efecto, supongamos que (x_n) es una sucesión de puntos de A que converge a x . Debemos probar que $x \in \bar{A}$. Para ello utilizamos la caracterización de clausura de la Proposición 1.42. Sea U un abierto tal que $x \in U$. Como $x_n \rightarrow x$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U, \forall n \geq n_0$. Entonces, en particular, $x_n \in A \cap U$. Es decir, $A \cap U \neq \emptyset$. Entonces $x \in \bar{A}$.

Ahora supongamos que X es metrizable con una distancia d . Sea $x \in \bar{A}$. Debemos probar que existe una sucesión de puntos de A que converge a x . Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $A \cap B_d(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ (pues $x \in \bar{A}$). Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A \cap B_d(x, \frac{1}{n})$. Probemos que $x_n \rightarrow x$. Sea U un abierto tal que $x \in U$. Entonces sabemos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon) \subseteq U$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Tenemos que para cada $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$. Entonces, para todo $n \geq n_0$, obtenemos que

$$x_n \in B_d(x, \frac{1}{n}) \subseteq B_d(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq B_d(x, \epsilon) \subseteq U.$$

Esto es, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in U$. Por lo tanto, la sucesión (x_n) converge a x . ■

Ejemplo 3.11. El espacio $\mathbb{R}^\omega$ con la topología de cajas (véase el Ejercicio 2.9) no es metrizable. Utilizaremos la proposición anterior. Mostraremos que existe un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^\omega$ y un

punto $\bar{x} \in \bar{A}$, tal que ninguna sucesión de puntos de A converge a $\bar{x}$. Sea

$$A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^\omega : x_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Dado que la topología sobre $\mathbb{R}^\omega$ es la topología por cajas, es sencillo comprobar que $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0, \dots) \in \bar{A}$. Ahora probaremos que ninguna sucesión de puntos de A converge a $\bar{0}$. Sea $(\bar{a}_n)$ una sucesión de puntos de A . Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{in}, \dots) \in A.$$

Sea $U = (-a_{11}, a_{11}) \times (-a_{22}, a_{22}) \times \dots$. Es claro que $\bar{0} \in U$. Pero $\bar{a}_n \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_{nn} \notin (-a_{nn}, a_{nn})$. Por lo tanto, la sucesión $(\bar{a}_n)$ no converge a $\bar{0}$. ■

Finalizamos esta sección con algunos resultados sobre función continua y convergencia de funciones.

Proposición 3.12

Sean X e Y espacios metrizablebles con distancias d_X y d_Y , respectivamente. Entonces, una función $f: X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si $\forall x \in X$ y $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$$

para todo $y \in X$.

Demostración. Antes de probar el resultado, es útil considerar lo siguiente. Sean $x, y \in X$ y $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$. Por un lado tenemos que

$$d_X(x, y) < \delta \iff y \in B_{d_X}(x, \delta)$$

y

$$d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon \iff f(y) \in B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \iff y \in f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)).$$

Por otro lado tenemos que la implicación $d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ es equivalente a la inclusión

$$f(B_{d_X}(x, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$$

la cual es equivalente a

$$B_{d_X}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)). \quad (3.6)$$

($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como f es continua tenemos que $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon))$ es un abierto de X y $x \in f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon))$. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $B_{d_X}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon))$. Por lo tanto, $d_X(x, y) < \delta \iff y \in B_{d_X}(x, \delta)$.

($\Leftarrow$) Vamos a utilizar la condición (4) de la Proposición 1.76. Sea $x \in X$ y sea V un abierto de Y tal que $f(x) \in V$. Entonces, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \subseteq V$. Ahora, por hipótesis, existe un $\delta > 0$ tal que $d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon, \forall y \in X$. Por (3.6), obtenemos que

$$x \in B_{d_X}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(V).$$

Con lo cual, existe $U := B_{d_X}(x, \delta)$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. ■

Ahora enunciaremos en un contexto más general un resultado clásico de análisis en el cual se afirma que la suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas es continua.

Proposición 3.13

Sea X un espacio topológico y consideremos a $\mathbb{R}$ con su topología usual. Sean $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g de X en $\mathbb{R}$ definidas por:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x);$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x);$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, aquí asumimos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$;

son continuas.

Demostración. En breve. ■

Definición 3.14

Sea X un conjunto arbitrario y sea Y un espacio metrizable con distancia d . Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n: X \rightarrow Y$ una función. Diremos que la sucesión (f_n) **converge uniformemente** a una función $f: X \rightarrow Y$ si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon \forall n > n_0$ y $\forall x \in X$.

Proposición 3.15

Sea $f_n: X \rightarrow Y$ una sucesión de funciones continuas de un espacio topológico X al espacio metrizable Y . Si la sucesión (f_n) converge uniformemente a una función $f: X \rightarrow Y$, entonces f es continua.

Demostración. Supongamos que la sucesión (f_n) converge uniformemente a una función $f: X \rightarrow Y$ y probemos que la función $f: X \rightarrow Y$ es continua. Sea $x_0 \in X$ y sea V un entorno de $f(x_0)$. Sea $y_0 = f(x_0)$. Como $y_0 \in V$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_d(y_0, \epsilon) \subseteq V$. Ahora por la convergencia uniforme, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/3$ para todo $n \geq N$ y todo $x \in X$. Como la función $f_N: X \rightarrow Y$ es continua y $f_N(x_0) \in B(f_N(x_0), \epsilon/3)$, entonces existe un entorno U de x_0 tal que $f_N(U) \subseteq B(f_N(x_0), \epsilon/3)$. Ahora vemos que $f(U) \subseteq B(y_0, \epsilon)$. Sea $x \in U$. Debemos probar que $f(x) \in B(y_0, \epsilon)$. Recordando que $y_0 = f(x_0)$, debemos probar que $d(f(x_0), f(x)) < \epsilon$. Por la desigualdad triangular obtenemos que

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Con lo cual, $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon) = B(y_0, \epsilon)$. Por lo tanto, $f(U) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$, y así f es continua. ■

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1. Sea d_e la distancia euclídea (o distancia usual) sobre $\mathbb{R}$, esto es, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $d_e(x, y) = |x - y|$. Describir las bolas abiertas $B_{d_e}(x, \epsilon)$ en términos de intervalos abiertos.

Ejercicio 3.2. Sea d una distancia sobre un conjunto X . Sea τ_d la topología inducida por la distancia d . Probar que la colección

$$\mathcal{B}_d^{<1} := \{B_d(x, \epsilon) : x \in X \text{ y } 0 < \epsilon < 1\}$$

es una base para τ_d .

Ejercicio 3.3. Sea X un espacio topológico metrizable. Probar que:

- (a) Todo subespacio de X es metrizable.
- (b) Probar que si Y es un espacio topológico homeomorfo a X , entonces Y es metrizable.

Ejercicio 3.4. Sea X un conjunto, y sea d la distancia sobre X definida por: para todos $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Probar que la distancia d induce la topología discreta sobre X . En otras palabras, la topología discreta es metrizable. ¿Es metrizable la topología indiscreta sobre un conjunto X ?

Ejercicio 3.5. Sea $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d((x, y), (a, b)) = \begin{cases} |y - b| & \text{si } x = a \\ 1 + |y - b| & \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

- (a) Probar que d es una distancia sobre $\mathbb{R}$.
- (b) Caracterizar la bola abierta $B_d((0, 0), 1)$.
- (c) Caracterizar la bola cerrada $\overline{B_d}((0, 0), 1) = \{(x, y) : d((x, y), (0, 0)) \leq 1\}$.
- (d) Probar que $\overline{B_d((0, 0), 1)} = \{(0, y) : |y| \leq 1\}$.
- (e) Explicar qué nos dicen los dos puntos anteriores. Es decir, qué se puede concluir de ellos.

Capítulo 4

Conexidad

4.1. Espacios conexos

Definición 4.1

Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par (U, V) de abiertos disjuntos no vacíos tal que $X = U \cup V$. El espacio X se dice **conexo** si no existe una tal separación.

Notemos que si (U, V) es una separación de un espacio X , entonces $U \neq \emptyset, X$ y $V \neq \emptyset, X$. A menudo diremos $X = U \cup V$ es una separación de X .

Observación 4.2. Si (U, V) es una separación de X , entonces $U^c = V$ y $V^c = U$. Entonces, U y V son también cerrados de X .

La conexidad es una propiedad topológica. Es decir, si X es un espacio conexo e Y es un espacio homeomorfo a X , entonces Y es también conexo. Véase el Ejercicio 4.1.

Proposición 4.3

Sea X un espacio topológico. Entonces, (U, V) es una separación de X si y sólo si U y V son abiertos no vacíos de X tales que $X = U \cup V$ y $\overline{U} \cap V = \emptyset$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que (U, V) es una separación de X . Lo único que resta probar es que $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Como U es en particular cerrado, tenemos que $\overline{U} = U$. Con lo cual $\overline{U} \cap V = U \cap V = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Ahora supongamos que U y V son abiertos no vacíos de X tales que $X = U \cup V$ y $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Lo único que falta probar para que (U, V) sea una separación de X es que

$U \cap V = \emptyset$. Como $U \subseteq \bar{U}$, tenemos que $U \cap V \subseteq \bar{U} \cap V = \emptyset$. Luego $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, (U, V) es una separación de X . ■

Proposición 4.4

Un espacio X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que X es conexo. Sea C un subconjunto abierto y cerrado de X . Queremos probar que $C = \emptyset$ o $C = X$. Supongamos por absurdo que $C \neq \emptyset$ y $C \neq X$. Entonces, C^c es también un subconjunto abierto y cerrado de X tal que $C^c \neq \emptyset$, y además $X = C \cup C^c$. Es decir, (C, C^c) es una separación de X , lo cual es absurdo.

$(\Leftarrow)$ Ahora supongamos que los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$. Supongamos que X no es conexo. Entonces existe una separación (U, V) de X . Como $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$, se sigue que $V = U^c$. Es decir, V es abierto y cerrado (por ser el complemento de un abierto). Como V es parte de una separación, $V \neq \emptyset$ y $V \neq X$. Lo cual es absurdo, pues los únicos abiertos y cerrados de X son el $\emptyset$ y X . Por lo tanto, X es conexo. ■

Ejemplo 4.5. El subespacio $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$ de $\mathbb{R}$ no es conexo. En efecto, tomando $U = Y \cap (-2, 0) = [-1, 0)$ y $V = Y \cap (0, 2) = (0, 1]$, tenemos que U y V son abiertos no vacíos de Y tales que $Y = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Esto es, (U, V) es una separación del subespacio Y . ■

Ejemplo 4.6. El conjunto $\mathbb{Q}$ (de números racionales) no es un subespacio conexo de $\mathbb{R}$. Tomando, por ejemplo, $U = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$ y $V = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$, tenemos que (U, V) es una separación del subespacio $\mathbb{Q}$. Los únicos subespacios conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos unipuntuales. Es sencillo comprobar que todos los conjuntos unipuntuales son conexos (véase el Ejercicio 4.2). Y estos son los únicos subespacios conexos de $\mathbb{Q}$. En efecto, sea $A \subseteq \mathbb{Q}$ con al menos dos elementos, digamos $p, q \in A$ ($p \neq q$). Supongamos que $p < q$. Sabemos que existe un irracional $x \in \mathbb{R}$ tal que $p < x < q$. Entonces, tomando $U = A \cap (-\infty, x)$ y $V = A \cap (x, +\infty)$, tenemos que (U, V) es una separación del subespacio A . Por lo tanto, A no es conexo. ■

Ahora caracterizaremos los subespacios conexos de $\mathbb{R}$. Es decir, diremos exactamente quienes son los subespacios conexos de $\mathbb{R}$. Para ello debemos considerar lo siguiente. Sabemos que un *intervalo* de $\mathbb{R}$ es un subconjunto de la forma (α, β) , $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, o $[\alpha, \beta]$, siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Estos se pueden caracterizar de forma muy sencilla de la siguiente manera:

Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un **intervalo** (es decir, es alguno de la forma anterior) si y sólo si para todos $x, y \in A$ y todo $z \in \mathbb{R}$, si $x \leq z \leq y$, entonces $z \in A$.

Equivalentemente, podemos también decir:

Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un **intervalo** (es decir, es alguno de la forma anterior) si y sólo si para todos $x, y \in A$, $[x, y] \subseteq A$.

Proposición 4.7

Sea F un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces, F es conexo si y sólo si F es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Probemos por el contrarecíproco. Supongamos que F no es un intervalo. Entonces, existen $x, y \in F$ y $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$ y $z \notin F$. Luego, los conjuntos

$$U := F \cap (-\infty, z) \quad \text{y} \quad V := F \cap (z, \infty)$$

son abiertos de F , disjuntos y no vacíos tal que $F = U \cup V$. Por lo tanto, F no es conexo.

$(\Leftarrow)$ Sea F un intervalo. Supongamos por absurdo que F no es conexo. Entonces, existen abiertos U y V de F no vacíos tales que $F = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sean $x \in U$ e $y \in V$. Supongamos que $x < y$. Como F es un intervalo tenemos que $[x, y] \subseteq F$. Sea $S = U \cap [x, y]$. Como $S \neq \emptyset$ (pues $x \in S$) y S está acotado superiormente (pues $S \subseteq [x, y]$), entonces existe $z := \sup S$ y $z \in [x, y]$. Luego, $z \in F$. Con lo cual $z \in U$ o $z \in V$.

- Si $z \in U$, entonces $z \notin V$. Luego $z < y$. Entonces $0 < y - z$. Como U es abierto en F , existe $0 < \epsilon < y - z$ tal que $(z - \epsilon, z + \epsilon) \cap F \subseteq U$. Como $\epsilon < y - z$, se tiene que $z + \frac{\epsilon}{2} \in [x, y] \subseteq F$ y $z + \frac{\epsilon}{2} \in (z - \epsilon, z + \epsilon) \cap F$. Entonces $z + \frac{\epsilon}{2} \in U$. Obtenemos que $z + \frac{\epsilon}{2} \in U \cap [x, y] = S$. Lo cual es absurdo, pues $z = \sup S$.
- Si $z \in V$, entonces $z \notin U$. Luego $x < z$. Puesto que V es abierto en F y $0 < z - x$, existe ϵ tal que $0 < \epsilon < z - x$ y $(z - \epsilon, z + \epsilon) \cap F \subseteq V$. Entonces $(z - \epsilon, z] \cap U = \emptyset$ ¹, pues $U \cap V = \emptyset$. Como $\epsilon < z - x$, se tiene que $x < z - \epsilon$. Sea $a \in S = U \cap [x, y]$. Como $a \in U$, se tiene que $a \notin (z - \epsilon, z]$. Entonces $a \leq z - \epsilon$ o $z < a$. Como $a \in S$ y $z = \sup S$, se tiene que $z \not< a$. Con lo cual $a \leq z - \epsilon$. Así obtuvimos que $a \leq z - \epsilon$, $\forall a \in S$. Absurdo, pues $z = \sup S$.

Por lo tanto, F es conexo. ■

¹Pues $(z - \epsilon, z] \cap U \subseteq (z - \epsilon, z + \epsilon) \cap F \subseteq V$

Proposición 4.8

Sea X un espacio y (U, V) una separación de X . Si Y es un subespacio conexo de X , entonces $Y \subseteq U$ o $Y \subseteq V$.

Demostración. A cargo del lector. Véase Ejercicio 4.7. ■

El siguiente resultado (y algunas de sus variaciones) es una herramienta útil para probar que ciertos espacios son conexos.

Proposición 4.9

Sea X un espacio topológico y sea $\{F_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de subespacios conexos de X tal que $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha$ es un subespacio conexo.

Demostración. Sea $F := \bigcup_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha$. Supongamos que F no es conexo, y sea $F = A \cup B$ una separación de F . Sea $p \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha$. Entonces, $p \in A$ o $p \in B$. Supongamos que $p \in A$. Para cada $\alpha \in \Gamma$, F_α es un subespacio conexo de F . Esto implica por la Proposición 4.8 que para cada $\alpha \in \Gamma$, $F_\alpha \subseteq A$ o $F_\alpha \subseteq B$. Como $p \in A$ y $A \cap B = \emptyset$, tenemos que $F_\alpha \subseteq A$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Entonces $F = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha \subseteq A$. Lo cual es absurdo, pues (A, B) era una separación de F . ■

La unión arbitraria de subespacios conexos no es necesariamente un subespacio conexo, la proposición anterior nos dice que una condición suficiente para que la unión de una familia de subespacios conexos sea conexo es que la intersección de toda la familia sea no vacía. Véase en la sección de Ejercicios propuestos para variaciones de la proposición anterior.

Proposición 4.10

Sea A un subespacio conexo de un espacio X . Si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo.

Demostración. Supongamos que B no es conexo. Entonces existe una separación (U, V) de B . Como A es un subespacio conexo de X , también es un subespacio conexo de B . Entonces, por la Proposición 4.8, $A \subseteq U$ o $A \subseteq V$. Supongamos que $A \subseteq U$ (de igual forma si $A \subseteq V$). Entonces $\overline{A} \subseteq \overline{U}$. Con lo cual $B \subseteq \overline{U}$. Ahora, como (U, V) es una separación de B , por la Proposición 4.3 tenemos que $\overline{U}^{B^2}$ y V son disjuntos. Entonces, $\emptyset = \overline{U}^B \cap V = \overline{U} \cap B \cap V = \overline{U} \cap V$. Con lo cual:

$$B \subseteq \overline{U} \implies V = B \cap V \subseteq \overline{U} \cap V = \emptyset \implies V = \emptyset.$$

² $\overline{U}^B$ denota la clausura de U en el espacio B .

Lo cual es absurdo!, pues V es parte de una separación. Por lo tanto, B es conexo. ■

Notemos que de la proposición anterior se desprende que la clausura de todo subespacio conexo es conexo.

Ejemplo 4.11. Probemos que el espacio producto $\mathbb{R}^\omega$ es conexo. Recordemos del Ejercicio 2.14 que $\mathbb{R}^\omega = \overline{\mathbb{R}^\infty}$ donde

$$\mathbb{R}^\infty = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^\omega : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \bar{x}(i) = 0 \text{ para todo } i > n\}.$$

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$\widehat{\mathbb{R}}^n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^\omega : \bar{x}(i) = 0 \text{ para todo } i > n\}.$$

Se puede probar sin dificultad (véase el Ejercicio 2.12) que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es un subespacio conexo del espacio $\mathbb{R}^\omega$. Ahora observemos que es sencillo comprobar que

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mathbb{R}}^n \quad \text{y} \quad \bar{0} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mathbb{R}}^n.$$

Luego, por la Proposición 4.9, tenemos que $\mathbb{R}^\infty$ es un subespacio conexo de $\mathbb{R}^\omega$. Por lo tanto, por la Proposición 4.10, obtenemos que $\mathbb{R}^\omega = \overline{\mathbb{R}^\infty}$ es conexo. ■

Proposición 4.12

Sea X un espacio conexo y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es un subespacio conexo de Y .

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 4.6. ■

Proposición 4.13

Sean X e Y dos espacios conexos. Entonces el espacio producto $X \times Y$ es conexo.

La idea para demostrar esta proposición es tratar de expresar al espacio $X \times Y$ como unión de subespacios conexos cuya intersección sea no vacía y aplicar la Proposición 4.9.

Demostración. Tomemos un punto cualquiera (a, b) del producto cartesiano $X \times Y$. Notemos que $X \cong X \times \{b\}$, y para cada $x \in X$, $Y \cong \{x\} \times Y$. Entonces, los conjuntos $X \times \{b\}$ y $\{x\} \times Y$ para cada $x \in X$, son subespacios conexos del espacio producto $X \times Y$. Ahora definimos los siguientes conjuntos: para cada $x \in X$ sea

$$T_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y).$$

Observemos que para cada $x \in X$, $(x, b) \in (X \times \{b\}) \cap (\{x\} \times Y)$. Es decir que para cada $x \in X$, el conjunto T_x es unión de dos subespacios conexos cuya intersección es no vacía. Entonces, por la Proposición 4.9, cada subespacio T_x es conexo. Ahora notemos que:

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x \quad \text{y} \quad (a, b) \in \bigcap_{x \in X} T_x.$$

Por lo tanto, por la Proposición 4.9, $X \times Y$ es conexo. ■

Teorema 4.14

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios topológicos conexos. Entonces el espacio producto $X := \prod X_\alpha$ es conexo.

Demostración. Daremos un esquema de la prueba, dejando los detalles al lector. Seguiremos los siguientes pasos.

1. Elijamos un punto arbitrario $\bar{a} = (a_\alpha) \in X$. Para cada $F \subseteq \Gamma$ finito, definimos el subespacio $X_F := \prod_{\alpha \in F} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Gamma - F} \{a_\alpha\}$.
2. Se prueba que para cada $X_F \subseteq \Gamma$ finite, el subespacio X_F es homeomorfo al producto finito $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$. Por la proposición anterior, esto implica que el subespacio X_F es conexo.
3. Sea $Y = \bigcup \{X_F : F \subseteq \Gamma \text{ finito}\}$. Cada X_F contiene al punto $\bar{a} = (a_\alpha)$, entonces por la Proposición 4.9, Y es conexo.
4. Se prueba que $\bar{Y} = X$. Por lo tanto, por la Proposición 4.10, obtenemos que X es conexo. ■

4.2. Espacios conexos por caminos

Definición 4.15

Sea X un espacio topológico. Sean $x, y \in X$. Un **camino** en X que une los puntos x e y es una función continua $f: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

En la definición anterior el intervalo cerrado $[0, 1]$ es considerado un subespacio de $\mathbb{R}$ (con la topología usual).

Definición 4.16

Un espacio X se dice **conexo por caminos** (o **arco-conexo**) si para cada par de puntos de X existe un camino que los une.

Teorema 4.17

Todo espacio X conexo por caminos es conexo.

Demostración. Sea X un espacio conexo por caminos. Supongamos que X no es conexo. Sea $X = U \cup V$ una separación de X . Tomemos $x \in U$ e $y \in V$. Sea $f: [0, 1] \rightarrow X$ un camino que une los puntos x e y . Como f es continua y $[0, 1]$ es un espacio conexo, tenemos que $f([0, 1])$ es un subespacio conexo de X . Luego, por la Proposición 4.8, tenemos que $f([0, 1]) \subseteq U$ o $f([0, 1]) \subseteq V$. Lo cual es absurdo, pues si $f([0, 1]) \subseteq U$, entonces $y = f(1) \in U$. Luego $y \in U \cap V$, lo cual es absurdo. Análogamente si $f([0, 1]) \subseteq V$. Por lo tanto, X es conexo. ■

Veamos ahora que la recíproca del teorema anterior no es verdad. Es decir, un espacio conexo no es necesariamente conexo por caminos.

Ejemplo 4.18 (Le19). Vamos a construir un conjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo, pero no conexo por caminos. Sea

$$A = [(0, 1] \times \{0\}] \cup \{0\} \times (0, 1] \cup \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \right]$$

véase la Figura 4.1. Primero, es claro observar a partir de la Figura 4.1 que A no es arco-conexo porque no podemos unir un punto $\bar{x} = (x_1, x_1) \in \{0\} \times (0, 1] \subseteq A$ con un punto $(y_1, y_2) \in (0, 1] \times \{0\}$ por un camino. Ahora probemos que A es conexo. Supongamos por absurdo que no lo es. Entonces existe una separación $A = U \cup V$ de A . Llamemos

$$B := \{0\} \times (0, 1] \quad \text{y} \quad C := [(0, 1] \times \{0\}] \cup \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \right].$$

Como B es claramente homeomorfo a $(0, 1]$, B es conexo. Es sencillo observar (véase la Figura 4.1) que C es arco-conexo, y así es conexo. Tenemos que $A = B \cup C$. Como $(0, \frac{1}{2}) \in A$, tenemos que $(0, \frac{1}{2}) \in U$ o $(0, \frac{1}{2}) \in V$. Supongamos que $(0, \frac{1}{2}) \in U$. Luego $(0, \frac{1}{2}) \in U \cap B$. Como (U, V) es una separación de A y $B \subseteq A$ es un subespacio conexo de A , entonces por la Proposición 4.8 tenemos que

$$B \subseteq U. \tag{4.1}$$

Como U es abierto y cerrado del subespacio A y $C \subseteq A$, entonces $C \cap U$ es abierto y cerrado del subespacio C . Veamos que $C \cap U \neq \emptyset$. Como $(0, \frac{1}{2}) \in U$ y U es un abierto de A , existe

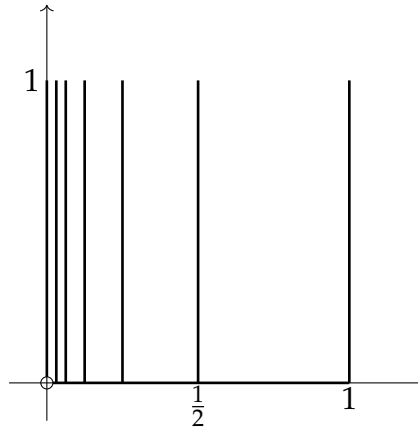


Figura 4.1: Un subespacio conexo que no es arco-conexo

$\epsilon > 0$ tal que $B((0, \frac{1}{2}), \epsilon) \cap A \subseteq U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Entonces $(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \in B((0, \frac{1}{2}), \epsilon) \cap A \subseteq U$. Con lo cual, $(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \in U \cap C$. Ahora, como C es conexo y $U \cap C$ es abierto y cerrado de C y no vacío, tenemos que $U \cap C = C$. Esto es,

$$C \subseteq U. \quad (4.2)$$

Luego, de (4.1) y (4.2), tenemos que $A \subseteq U$, lo cual es absurdo porque (U, V) era una separación de A . Por lo tanto, concluimos que A es conexo. ■

Ejemplo 4.19. Consideremos el subespacio $X = [0, 1)$ de $\mathbb{R}$ y el subespacio

$$Y = \{(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) : 0 \leq t < 1\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Es sencillo probar que la función $f: X \rightarrow Y$ definida por $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ es biyectiva y continua, véase la Figura 4.2. Nos preguntamos ¿es f un homeomorfismo? Veremos que no. De hecho, probaremos que X y Y no son espacios homeomórficos. Supongamos que si, que X e Y son homeomorfos. Es decir, existe un homeomorfismo $\alpha: X \rightarrow Y$. Ahora observemos lo siguiente. Sabemos que $X = [0, 1)$ es un espacio conexo. Y es sencillo observar que el espacio Y es conexo por caminos, y por lo tanto conexo. Tomemos los subespacios $X' = X - \{\frac{1}{2}\}$ de X e $Y' = Y - \{\alpha(\frac{1}{2})\}$ de Y . Entonces, por un lado, sabemos que la función $\alpha: X' \rightarrow Y'$ sigue siendo un homeomorfismo entre los espacios X' e Y' (véase el Ejercicio 1.66). Ahora, por otro lado, es claro que $X' = [0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ no es conexo. Pero el subespacio Y' de Y , al quitarle sólo un punto, sigue siendo claramente conexo por caminos, y por lo tanto conexo. En resumen, estamos diciendo que $X' \cong Y'$ donde X' no es conexo e Y' es conexo, lo cual es absurdo. Por lo tanto, X e Y no son homeomorfos, y en particular f no es un homeomorfismo. ■

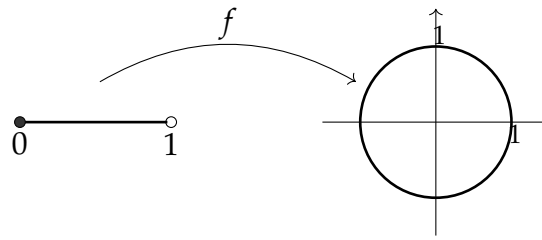


Figura 4.2: $[0, 1]$ no es homeomorfo al círculo unidad

4.3. Componentes

Las componentes de un espacio topológico son los subespacios conexos más grandes del espacio. Por ejemplo, las componentes de un espacio conexo X , es X mismo. Recordando que en el espacio $\mathbb{Q}$ (con la topología usual de $\mathbb{R}$) los únicos subespacios eran los conjuntos unipuntuales $\{q\}$, tenemos que las componentes de $\mathbb{Q}$ son justamente los conjuntos unipuntuales $\{q\}$.

Definición 4.20

Una **componente** de un espacio topológico X es un subespacio maximal de X .

En otras palabras,

Un subconjunto $C \subseteq X$ de un espacio X , es una **componente** de X si:

1. C es conexo;
2. Si $C \subseteq D \subseteq X$ y D es conexo, entonces $C = D$.

Ejemplo 4.21. Sea $X = \mathbb{R} - \{0\}$ con la topología usual de $\mathbb{R}$. Entonces las componentes de X son $A = (-\infty, 0)$ y $B = (0, \infty)$. ■

Para cada elemento $x \in X$, existe una componente C_x de X que contiene a x . En efecto, sea $C_x := \bigcup \{C \subseteq X : x \in C \text{ y } C \text{ es conexo}\}$. Es claro que $x \in C_x$, y por la Proposición 4.9 tenemos que C_x es conexo. Además, C_x es maximal. Supongamos que D es conexo y $C_x \subseteq D \subseteq X$. Como $x \in C_x \subseteq D$, tenemos que D pertenece a la familia $\{C \subseteq X : x \in C \text{ y } C \text{ es conexo}\}$, entonces $D \subseteq \bigcup \{C \subseteq X : x \in C \text{ y } C \text{ es conexo}\} = C_x$. Con lo cual, $D = C_x$. Por lo tanto, C_x es una componente de X y $x \in C_x$. También se pueden comprobar las siguientes afirmaciones:

1. $X = \bigcup_{x \in X} C_x$.

2. Si $C_x \neq C_y$, entonces $C_x \cap C_y = \emptyset$.
3. Si D es una componente de X , entonces existe un $x \in X$ tal que $D = C_x$.

Lo anterior prueba que la colección $\{D \subseteq X : D \text{ es una componente de } X\} = \{C_x : x \in X\}$ forma una partición del conjunto X . En otras palabras, lo anterior prueba que un espacio X puede ser dividido en varias partes que son conexas.

Teorema 4.22

Cada componente de un espacio X es un subconjunto cerrado.

Demostración. Sea D una componente de X . Como D es conexo, $\overline{D}$ es también conexo. Como $D \subseteq \overline{D}$, por maximalidad obtenemos que $D = \overline{D}$. ■

Ejemplo 4.23. Sea $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]$ un subespacio de $\mathbb{R}_u$. Entonces X tiene tres componentes: $[0, 1]$, $[2, 3]$, y $[4, 5]$. Se tiene que $C_x = [0, 1]$ para todo $0 \leq x \leq 1$, $C_x = [2, 3]$ para todo $2 \leq x \leq 3$, y $C_x = [4, 5]$ para todo $4 \leq x \leq 5$. ■

Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1. Sea X un espacio topológico conexo. Probar que si Y es un espacio topológico y $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces Y es conexo.

Ejercicio 4.2. Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$. Probar que el subespacio $\{x_0\}$ es conexo. Es decir, todos los conjuntos unipuntuales son siempre subespacios conexos.

Ejercicio 4.3. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y sea la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$. Determinar si los siguientes son subespacios conexos de X .

- (a) $A = \{b, d, e\}$. (b) $B = \{a, d\}$. (c) X .

Ejercicio 4.4. Probar de dos formas distintas que si X es un conjunto infinito con la topología cofinita, entonces X es conexo.

(Pista: Una de las formas es usar la Proposición 4.4.)

Ejercicio 4.5. ¿Es el espacio $\mathbb{R}_S$ conexo?

Ejercicio 4.6. Probar que si X es un espacio conexo y $f: X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es un subespacio conexo de Y .

Ejercicio 4.7. Sea X un espacio y (U, V) una separación de X . Probar que si Y es un subespacio conexo de X , entonces $Y \subseteq U$ o $Y \subseteq V$.

Ejercicio 4.8. Sea A_n una sucesión de espacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo.

Ejercicio 4.9. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de subespacios conexos de X . Suponga que existe un $\beta \in \Gamma$ tal que $A_\beta \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Probar que $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ es conexo.

Ejercicio 4.10. Sea X un espacio y sea Y un subespacio de X . Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) Y no es un subespacio conexo de X .
- (2) Existen abiertos U y V de X tales que $Y \cap U \neq \emptyset$, $Y \cap V \neq \emptyset$, $Y \subseteq U \cup V$, y $U \cap V \subseteq Y^c$.

Ejercicio 4.11. Probar que el conjunto $A = \{(x, y) : y^2 - x^2 \geq 4\}$ no es un subespacio conexo de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4.12. Sea X un espacio topológico. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes.

- (I) X es conexo.
- (II) Toda función continua del espacio X en el espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 4.13. Sea X un espacio topológico. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes.

- (I) X es conexo.
- (II) Toda función continua del espacio X en un espacio discreto es constante.

Ejercicio 4.14 (Teorema del valor intermedio de Weierstrass). Sea X un espacio topológico conexo y sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua ($\mathbb{R}$ con su topología usual). Probar que para todos $x, y \in X$, si $f(x) < a < f(y)$, entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) = a$.

Ejercicio 4.15. Sea X un espacio topológico. Probar que si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un conjunto conexo C que los contiene, entonces X es conexo.

Ejercicio 4.16. Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Sean A y B abiertos de X . Probar que si $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos. (Indicación: Notar que como A es abierto de X , entonces $\tau_A = \{U \in \tau : U \subseteq A\}$.)

Ejercicio 4.17. Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X . Probar que si X es conexo, entonces el espacio cociente $X/\sim$ es conexo.

Ejercicio 4.18. Probar que un espacio X es conexo si y sólo si las únicas funciones continuas de X en el espacio discreto $Y = \{0, 1\}$ son las funciones constantes, $f(x) = 0 \forall x \in X$, o $f(x) = 1 \forall x \in X$.

Ejercicio 4.19. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios topológicos. Probar de dos formas distintas que si el espacio producto $\prod X_\alpha$ es conexo, entonces cada espacio X_α es conexo.

Ejercicio 4.20.

- (a) Considere los subespacios $(0, 1)$, $(0, 1]$ y $[0, 1]$. Probar que ningún par de ellos son homeomorfos. (*Indicación:* ¿qué ocurre si le quitamos un punto a cada uno de ellos? ¿Siguen siendo conexos?)
- (b) Probar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos para $n > 1$.

Ejercicio 4.21. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Probar que existe un punto $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. Un punto x que cumple que $f(x) = x$ se llama **punto fijo de f** . ¿Si $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, es verdad que g tiene un punto fijo? y ¿si $h: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ es continua, tiene h un punto fijo?

Ejercicio 4.22. Un espacio topológico X es llamado **totalmente desconexo** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $X = U \cup V$.

- (a) Probar que $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base $\mathcal{B}_\ell = \{(a, b] : a < b\}$ es totalmente desconexo.
- (b) Probar que el subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ (con la topología usual) es totalmente desconexo.
- (c) Probar que un espacio X es totalmente desconexo si sus únicos subespacios conexos no vacíos son los conjuntos unipuntuales.
- (d) Probar que si X tiene la topología discreta, entonces X es totalmente desconexo. ¿Es cierto el recíproco?

Espacios conexos por caminos

Ejercicio 4.23. Sean X e Y espacios conexos por caminos. Probar que el espacio producto $X \times Y$ es conexo por caminos.

Ejercicio 4.24. Probar que si $f: X \rightarrow Y$ es continua y X es conexo por caminos, entonces $f(X)$ es conexo por caminos.

Ejercicio 4.25. Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una colección de subespacios conexos por caminos de X tal que $\bigcap A_\alpha \neq \emptyset$. Probar que $\bigcup A_\alpha$ es conexo por caminos. (*Indicación:* Utilizar el Lema del Pegamiento.)

Ejercicio 4.26. Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X . Probar que si X es conexo por caminos, entonces el espacio cociente $X/\sim$ es conexo por caminos.

Componentes

Ejercicio 4.27. Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Probar que existe una única componente que contiene a x .

Ejercicio 4.28. Sea X un espacio topológico y sea $F \subseteq X$ un subespacio conexo de X . Probar que existe una componente C de X que contiene a F .

Ejercicio 4.29. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Sea $D \subseteq X$. Probar que D es una componente de X si y sólo si $f(D)$ es una componente de Y .

Ejercicio 4.30. Sea X un espacio topológico. Si X tiene una cantidad finita de componentes, entonces cada componente es un abierto de X .

Ejercicio 4.31. Un espacio topológico X se dice **localmente conexo** si para cada $x \in X$ y cada entorno U de x , existe un abierto conexo V de X tal que $x \in V \subseteq U$.

Probar que un espacio es localmente conexo si y sólo si la familia de todos los subconjunto abiertos conexos forman una base del espacio.

Capítulo 5

Compacidad

5.1. Espacios compactos

Definición 5.1

Sea X un espacio topológico e $Y \subseteq X$. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es llamada un **cubrimiento abierto de Y en X** si cada miembro de $\mathcal{A}$ es un abierto de X e $Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.

Ejemplo 5.2.

1. Sea $\mathcal{A} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (con la topología usual). También, es verdad que $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
2. La colección $\mathcal{A} = \{(-1, -1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto del intervalo $(-1, 0)$ en $\mathbb{R}$. ■

Observación 5.3. Si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de un espacio X , entonces se tiene que $X = \bigcup \mathcal{A}$.

Definición 5.4

Sea X un espacio e $Y \subseteq X$. Diremos que el subespacio Y es **compacto** si todo cubrimiento abierto de Y en X contiene un subcubrimiento finito de Y .

En otras palabras:

Un subespacio Y es **compacto** si para cada cubrimiento abierto $\mathcal{A} = \{U_i : i \in I\}$ de Y en X existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tal que $Y \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Ejemplo 5.5.

1. $\mathbb{Q}$ (y tampoco $\mathbb{R}$) no es un espacio compacto (con la topología usual de $\mathbb{R}$). En efecto, $\mathcal{A} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ el cual no contiene ningún subcubrimiento finito de $\mathbb{Q}$ (ni de $\mathbb{R}$).
2. Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces X es un subespacio compacto de $\mathbb{R}$. En efecto, sea $\mathcal{A} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de X en $\mathbb{R}$. Es decir, para cada $i \in I$, U_i es un abierto de $\mathbb{R}$, y $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Como $0 \in X$, existe $i_0 \in I$ tal que $0 \in U_{i_0}$. Ahora, como U_{i_0} es un abierto de $\mathbb{R}$, existe un intervalo abierto (a, b) tal que $0 \in (a, b) \subseteq U_{i_0}$. Como $0 \in (a, b)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a < 0 < \frac{1}{N} < b$. Entonces, para todo $n \geq N$, tenemos que $a < 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < b$. Con lo cual $\frac{1}{n} \in (a, b) \subseteq U_{i_0}$ para todo $n \geq N$. Ahora, como $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, tenemos que para cada $n < N$, existe un $i_n \in I$ tal que $\frac{1}{n} \in U_{i_n}$. Entonces, obtuvimos que

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_{N-1}}.$$

Por lo tanto, como $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_{N-1}}\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{A}$, concluimos que X es compacto.

3. El intervalo $(0, 1]$ no es un subespacio compacto de $\mathbb{R}$. Consideremos el cubrimiento abierto $\mathcal{A} = \{(\frac{1}{n}, 2) : n \in \mathbb{N}\}$ de $(0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Veamos que $\mathcal{A}$ no contiene ningún subcubrimiento finito de $(0, 1]$. Supongamos por absurdo que si contiene un subcubrimiento finito $\mathcal{A}_0 = \{(\frac{1}{n_1}, 2), \dots, (\frac{1}{n_k}, 2)\}$. Sea $m = \min\{n_1, \dots, n_k\}$. Entonces $\bigcup \mathcal{A}_0 = (\frac{1}{m}, 2)$, el cual no cubre a $(0, 1]$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ efectivamente no contiene ningún subcubrimiento finito de $(0, 1]$ en $\mathbb{R}$. ■

Proposición 5.6

Sea X un espacio compacto. Entonces, todo subespacio cerrado de X es compacto.

Demostración. Sea X un espacio compacto y sea A un cerrado de X . Probemos que A es compacto. Sea $\{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto de A en X . Con lo cual,

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \implies X = \bigcup_{i \in I} U_i \cup A^c.$$

Así $\{U_i : i \in I\} \cup \{A^c\}$ es un cubrimiento abierto de X . Por ser X compacto, existen $i_1, \dots, i_k \in I$ tal que $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k} \cup A^c$. Entonces, $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$. Por lo tanto, A es compacto. ■

Proposición 5.7

Sea X un espacio Hausdorff. Entonces, todo subespacio compacto de X es cerrado.

Demostración. Sea X Hausdorff y A un subespacio compacto de X . Vamos a probar que A^c es abierto de X . Sea $x_0 \in A^c$. Entonces, para cada $a \in A$, $x_0 \neq a$. Como X es Hausdorff, para cada $a \in A$, existen abiertos U_a y V_a tales que $a \in U_a$, $x_0 \in V_a$ y $U_a \cap V_a = \emptyset$. Observemos que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$. Luego, como A es compacto, existen $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $A \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$. Sea $U := U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$. Con lo cual U es un abierto y $A \subseteq U$. Ahora sea $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$. Observemos que V es abierto y $x_0 \in V$. Por otro lado, vemos que $U \cap V = \emptyset$. Entonces

$$x_0 \in V \subseteq U^c \subseteq A^c.$$

Por lo tanto, A^c es abierto y así A es cerrado. ■

Ejemplo 5.8. Los intervalos acotados (a, b) , $(a, b]$ y $[a, b)$ no son compactos en $\mathbb{R}_u$. En efecto, sabemos que $\mathbb{R}_u$ es de Hausdorff y los intervalos anteriores no son cerrados de $\mathbb{R}_u$. Entonces, por la proposición anterior ellos no pueden ser compactos. ■

En la proposición anterior la hipótesis de ser Hausdorff no puede omitirse. Es decir, hay espacios que no son Hausdorff y donde hay un subespacio compacto que no es cerrado. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.9. Sabemos que la topología cofinita sobre $\mathbb{R}$ no es Hausdorff (véase 1.46), y además que los subespacios cerrados son exactamente los subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$. Por otro lado, se puede probar (véase el Ejercicio 5.4) que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son compactos. Por lo tanto, hay subespacios compactos que no son cerrados. ■

Proposición 5.10

Sea X un espacio Hausdorff. Si Y es un subespacio compacto de X y $x_0 \notin Y$, entonces existen abiertos U y V tales que $x_0 \in U$, $Y \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$.

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 5.12. ■

Proposición 5.11

Sea X un espacio compacto y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es un subespacio compacto de Y .

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 5.14. ■

Teorema 5.12

En $\mathbb{R}$ con la topología usual, todo intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es compacto.

Demostración. Supongamos que $a < b$, y sea $\mathcal{A} = \{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento abierto del intervalo $[a, b]$. Esto es, $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Sea

$$A := \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ está cubierto por un número finito de elementos de } \mathcal{A}\}.$$

Como $a \in A$, $A \neq \emptyset$; y como $A \subseteq [a, b]$, A está acotado superiormente. Entonces A tiene un supremo. Sea $m := \sup A$. Tenemos que $a \leq m \leq b$, es decir, $m \in [a, b]$. Entonces, existe un $j \in I$ tal que $m \in U_j$. Supongamos que $m < b$. Como U_j es abierto de $\mathbb{R}_u$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < b - m$ y $[m - \epsilon, m + \epsilon] \subseteq U_j$. Por ser m el supremo de A , existe un $x_1 \in A$ tal que $m - \epsilon < x_1 \leq m$. Notemos que

$$a \leq x_1 \leq m < m + \epsilon < b$$

lo cual implica que $m + \epsilon \in [a, b]$. Por otro lado, como $x_1 \in A$, tenemos que $[a, x_1] \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$, para algunos $i_1, \dots, i_n \in I$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} [a, m + \epsilon] &= [a, x_1] \cup [x_1, m + \epsilon] \subseteq [a, x_1] \cup [m - \epsilon, m + \epsilon] \subseteq \\ &\subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \cup U_j. \end{aligned}$$

Con lo cual, $m + \epsilon \in A$. Esto es absurdo, pues m es el supremo de A . Este absurdo provino de suponer que $m < b$. Entonces, $m = b$. Es decir, $b = m = \sup A$. Ahora probemos que $b \in A$. Sea $j \in I$ tal que $b \in U_j$. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $[b - \delta, b + \delta] \subseteq U_j$. Como $b = \sup A$, existe $y \in A$ tal que $b - \delta < y \leq b$. Como $y \in A$, tenemos que $[a, y] \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$. Luego,

$$[a, b] = [a, y] \cup [y, b] \subseteq [a, y] \cup [b - \delta, b + \delta] \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \cup U_j.$$

Entonces, $b \in A$. Lo que significa que $[a, b]$ está cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Por lo tanto, $[a, b]$ es compacto. ■

Ejemplo 5.13. Toda circunferencia del plano cartesiano (con la topología usual) es un subespacio compacto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es suficiente probarlo para la circunferencia con centro en el origen y radio 1. Sea S^1 esta. Sea $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Es claro que F es continua, ya que las funciones cos y sin son continuas. Además, sabemos que $F([0, 1]) = S^1$. Por lo tanto, ya que el subespacio $[0, 1]$ es compacto, tenemos que S^1 es compacto. ■

Presentamos una caracterización útil del concepto de compacidad. Primero necesitamos una definición.

Definición 5.14

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice que tiene la **propiedad de intersección finita** si cada subcolección finita $\{C_1, \dots, C_n\}$ de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía.

Es decir, $\mathcal{C}$ tiene la PIF si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todos $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$, se tiene que $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$.

Ejemplo 5.15. Sea $\mathcal{C} = \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$. Entonces $\mathcal{C}$ tiene la PIF. En efecto, tomemos una subcolección arbitraria finita de $\mathcal{C}$: sea $\left\{ \left(0, \frac{1}{n_1}\right), \dots, \left(0, \frac{1}{n_k}\right) \right\}$. Sea $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Entonces $\left(0, \frac{1}{m}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{n_i}\right)$ para todo $i = 1, \dots, k$ (¿por qué?). Entonces

$$\left(0, \frac{1}{m}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{n_1}\right) \cap \dots \cap \left(0, \frac{1}{n_k}\right) \implies \left(0, \frac{1}{n_1}\right) \cap \dots \cap \left(0, \frac{1}{n_k}\right) \neq \emptyset.$$

Teorema 5.16

Un espacio X es compacto si y sólo si para cada colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos cerrados de X con la PIF se tiene que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto. Sea $\mathcal{C}$ una colección arbitraria de subconjuntos cerrados de X que tiene la PIF. Debemos probar que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Supongamos por absurdo que $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$. Entonces, tomado complemento y usando las leyes de De Morgan, tenemos que $X = \bigcup \{C^c : C \in \mathcal{C}\}$. Para cada $C \in \mathcal{C}$, tenemos que C^c es un abierto de X . Entonces $\{C^c : C \in \mathcal{C}\}$ es un cubrimiento abierto de X . Como X es compacto, existen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ tal que $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$. Nuevamente, tomando complemento y utilizando las leyes de De Morgan, obtenemos que $\emptyset = C_1 \cap \dots \cap C_n$. Lo cual es absurdo pues la colección $\mathcal{C}$ tiene la PIF. Por lo tanto, $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para toda colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos cerrados de X con la PIF se tiene que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Probemos que X es compacto. Sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto de X . Ahora, tomado complemento y usando las leyes de De Morgan, tenemos que $\emptyset = \bigcap_{i \in I} U_i^c$. Sea $\mathcal{C} = \{U_i^c : i \in I\}$. Es claro que la colección $\mathcal{C}$ está formada por subconjuntos cerrados de X . Como $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} U_i^c = \emptyset$, por hipótesis obtenemos que la colección $\mathcal{C}$ no tiene la PIF. Es decir, existen $U_{i_1}^c, \dots, U_{i_k}^c \in \mathcal{C}$ tales que $U_{i_1}^c \cap \dots \cap U_{i_k}^c = \emptyset$. Entonces, $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$. Por lo tanto, X es compacto. ■

El siguiente resultado muestra cómo la topología está íntimamente relacionada con cuestiones de cardinalidad. Necesitamos la siguiente definición.

Definición 5.17

Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es llamado **punto aislado** de X si $\{x\}$ es un abierto de X .

Proposición 5.18

Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Si X no tiene puntos aislados, entonces X no es contable (es decir, es infinito no numerable).

Demostración. Paso 1: Probemos que para todo abierto U no vacío y para todo $x \in X$, existe un abierto V no vacío tal que $V \subseteq U$ y $x \notin \bar{V}$.

Sea $U \neq \emptyset$ abierto y $x \in X$. Elijamos un punto $y \in U$ tal que $y \neq x$. Esto es posible porque:

- Si $x \notin U$, tomamos cualquier $y \in U$;
- Si $x \in U$, como $\{x\}$ no es abierto de X , tenemos que $\{x\} \subset U$. Con lo cual existe $y \in U$ tal que $y \notin \{x\}$.

Como $x \neq y$ y X es Hausdorff, existen dos abiertos W_1 y W_2 tales que $x \in W_1$, $y \in W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Sea $V := U \cap W_2$. Luego, claramente tenemos que $V \subseteq U$. Además, como W_1 es abierto, $x \in W_1$ y $W_1 \cap V = \emptyset$, tenemos que $x \notin \bar{V}$.

Paso 2: Veamos que no existe una función sobreyectiva $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ una función. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n := f(n)$. Aplicando el Paso 1 a x_1 y X , tenemos que existe un abierto $V_1 \neq \emptyset$ tal que $x_1 \notin \bar{V}_1$. Ahora aplicamos el Paso 1 a x_2 y V_1 , entonces existe un abierto $V_2 \neq \emptyset$ tal que $V_2 \subseteq V_1$ y $x_2 \notin \bar{V}_2$. Luego, inductivamente, dado un $V_{n-1} \neq \emptyset$ abierto, existe un abierto $V_n \neq \emptyset$ tal que $V_n \subseteq V_{n-1}$ y $x_n \notin \bar{V}_n$. Así, tenemos la sucesión decreciente $\bar{V}_1 \supseteq \bar{V}_2 \supseteq \dots$ de cerrados no vacíos en X . Como X es compacto y la familia $\{\bar{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la PIF, tenemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n \neq \emptyset$. Entonces, existe un $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n \neq \emptyset$. Entonces, $x \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo cual muestra que la función f no es sobreyectiva. Por lo tanto, X no es numerable. ■

5.2. El teorema de Tychonoff

En esta sección probaremos uno de los resultados más importantes en Topología. Para este fin, necesitaremos un resultado teórico igualmente importante de la teoría de conjuntos ordenados, el cual pasamos a enunciar. Omitimos su demostración ya que esta fuera de los propósitos de este libro.

Teorema 5.19: Lema de Zorn

Sea P un conjunto parcialmente ordenado no vacío. Si todo subconjunto totalmente ordenado y no vacío de P tiene una cota superior en P , entonces P posee un elemento maximal.

Proposición 5.20

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X tal que $\mathcal{A}$ satisface la PIF. Entonces existe una colección maximal $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X que satisface la PIF y contiene a $\mathcal{A}$.

Observación 5.21. Es decir, la colección $\mathcal{D}$ contiene a $\mathcal{A}$, satisface la PIF, y si hay otra colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X tal que satisface la PIF y contiene a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{E} = \mathcal{D}$.

Demostración. Sea

$$\mathbb{H} = \{\mathcal{C} : \mathcal{C} \text{ es una colección de subconjuntos de } X \text{ tq. } \mathcal{C} \text{ tiene la PIF y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}\}.$$

Consideremos a $\mathbb{H}$ ordenado por el orden inclusión $\subseteq$. Veamos que $\mathbb{H}$ cumple con la hipótesis del Lema de Zorn. Sea $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{H}$ totalmente ordenado. Sea $\mathcal{C} = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos que contiene a $\mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{C}$ satisface la PIF. Sean $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}$. Entonces existen $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k \in \mathbb{B}$ tal que $C_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, C_k \in \mathcal{B}_k$. Como $\mathbb{B}$ está totalmente ordenado, existe un $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{B}_i$. Entonces $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{B}_i$, y como $\mathcal{B}_i$ satisface la PIF, tenemos que $C_1 \cap \dots \cap C_k \neq \emptyset$. Entonces, efectivamente $\mathcal{C}$ satisface la PIF. Esto implica que $\mathcal{C} \in \mathbb{H}$ y es una cota superior de $\mathbb{B}$. Hemos probado que todo subconjunto $\mathbb{B}$ totalmente ordenado de $\mathbb{H}$ tiene una cota superior, entonces por el Lema de Zorn $\mathbb{H}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{D}$. ■

Proposición 5.22

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{D}$ una colección máxima de subconjuntos de X que satisface la PIF^a. Entonces,

- (1) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{D}$, entonces $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{D}$.
- (2) Si $A \subseteq X$ tal que $A \cap D \neq \emptyset \forall D \in \mathcal{D}$, entonces $A \in \mathcal{D}$.

^aEs decir, $\mathcal{D}$ satisface la PIF y, si $\mathcal{E}$ es otra colección que satisface la PIF y $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$, entonces $\mathcal{D} = \mathcal{E}$.

Demostración. (1) Sea $B = A_1 \cap \dots \cap A_n$ con $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{D}$. Sea $\mathcal{C} := \mathcal{D} \cup \{B\}$. Veamos que $\mathcal{C}$ tiene la PIF. Sean $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$. Si todos los $C_1, \dots, C_n$ están en $\mathcal{D}$, entonces como $\mathcal{D}$ satisface la PIF, tenemos que $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$. Si alguno de los C_i es B , digamos por ejemplo que $C_1 = B$, entonces nos queda

$$C_1 \cap \dots \cap C_n = A_1 \cap \dots \cap A_n \cap C_2 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$$

pues es una intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{C}$ satisface la PIF. Luego, como $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es máxima, se tiene que $\mathcal{D} = \mathcal{C}$. Con lo cual $B \in \mathcal{D}$.

(2) Sea $A \subseteq X$ y supongamos que $A \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Usando el inciso (1) se puede probar que $\mathcal{A}$ satisface la PIF. Entonces, como $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ es máxima, tenemos que $A \in \mathcal{D}$. ■

Teniendo las dos proposiciones anteriores estamos listo para probar el famoso teorema de Tychonoff.

Teorema 5.23: El teorema de Tychonoff

El producto (arbitrario) de espacios compactos es compacto.

Demostración. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios compactos y sea $X := \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$. Vamos a probar que X es compacto utilizando el Teorema 5.16. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos cerrados de X con la PIF. Debemos probar que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Por la Proposición 5.20, sea $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es máxima con respecto a satisfacer la PIF. Probaremos que $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset$.

Para cada $\alpha \in \Gamma$, sea $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ la función proyección. Sea $\alpha \in \Gamma$. La colección $\{\pi_\alpha(D) : D \in \mathcal{D}\}$ de subconjuntos del espacio X_α satisface la PIF (pues $\mathcal{D}$ satisface la PIF). También, podemos comprobar que la colección $\{\overline{\pi_\alpha(D)} : D \in \mathcal{D}\}$ de cerrados del espacio X_α satisface

la PIF. Como X_α es compacto, por el Teorema 5.16 tenemos que

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)} \neq \emptyset.$$

Entonces, para cada $\alpha \in \Gamma$, sea

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}.$$

Sea $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$. Veamos que $\mathbf{x} \in \overline{D}$ para todo $D \in \mathcal{D}$. Sea $D \in \mathcal{D}$. Sea $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ un elemento subbásico del espacio producto X tal que $\mathbf{x} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$. Luego $x_\beta \in U_\beta$, y como $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ (por definición del x_β), tenemos que existe un $\mathbf{y} \in D$ tal que $\pi_\beta(\mathbf{y}) \in U_\beta$. Entonces $\mathbf{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$. Hemos probado que cada subbásico $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ que contiene a $\mathbf{x}$ intersecta a todos los $D \in \mathcal{D}$. Entonces, por la Proposición 5.22, tenemos que

$$\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : \mathbf{x} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta)\} \subseteq \mathcal{D}.$$

Luego, como $\mathcal{D}$ es cerrado bajo intersecciones finitas (Proposición 5.22), obtenemos que $\mathcal{D}$ contiene a todos los abiertos básicos $\pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$ que contienen a $\mathbf{x}$. Entonces, que para cada abierto básico U del espacio producto X que contiene $\mathbf{x}$, se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$ (pues $U, D \in \mathcal{D}$). Con lo cual, $\mathbf{x} \in \overline{D}$ para todo $D \in \mathcal{D}$. Ahora, como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, obtenemos que

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Por lo tanto, $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$, y por el Teorema 5.16 obtenemos que $X = \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es compacto. ■

Con ayuda del Teorema de Tychonoff podemos caracterizar todos los subespacios compactos de $\mathbb{R}^n$ (con la topología producto y $\mathbb{R}$ con su topología usual).

Proposición 5.24

Un subespacio de A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado con respecto a la distancia euclídea d_e o la distancia del supremo ρ .

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que A es compacto. Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio metrizable, $\mathbb{R}^n$ es de Hausdorff. Entonces, A es cerrado. Ahora como $A \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(\bar{0}, n)$ y A es compacto, tenemos que $A \subseteq B(\bar{0}, n_1) \cup \cdots \cup B(\bar{0}, n_k) \subseteq B(\bar{0}, M)$, siendo $M = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Por lo tanto, A es acotado.

($\Leftarrow$) Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado. Por ser A acotado, existe un $r > 0$ tal que $A \subseteq B(\bar{0}, r) \subseteq [-r, r]^n$. Como los intervalos $[-r, r]$ son compactos, el producto $[-r, r]^n$ es compacto por el Teorema de Tychonoff. Ahora, como A es cerrado y $A \subseteq [-r, r]^n$, tenemos que A es cerrado del espacio compacto $[-r, r]^n$. Entonces A es compacto. ■

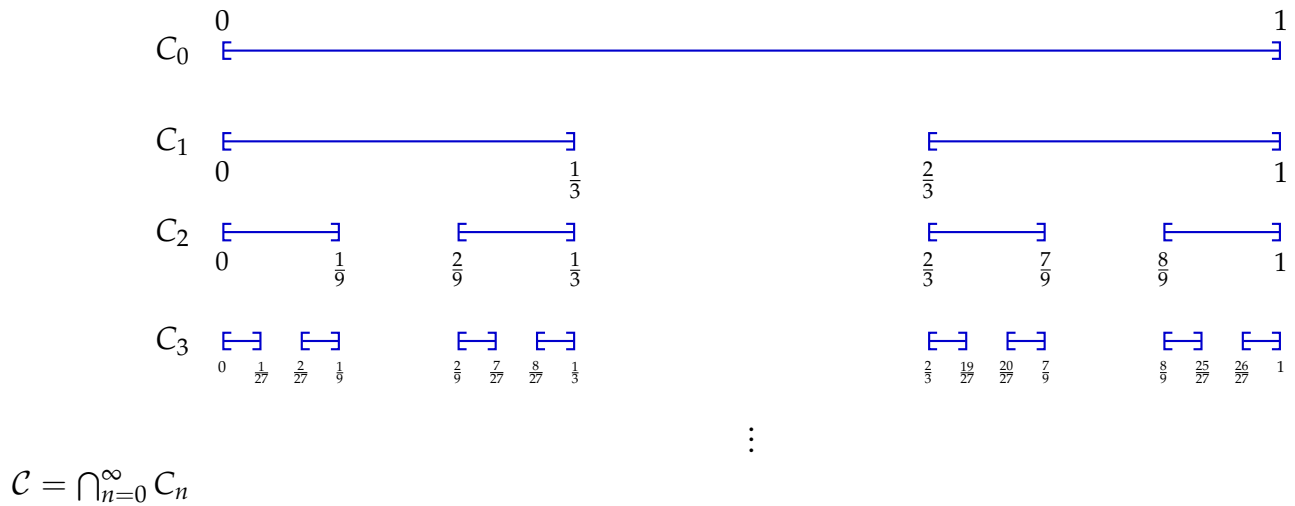


Figura 5.1: Conjunto de Cantor

5.3. El conjunto de Cantor

Vamos a construir un conjunto de números reales el cual es utilizado como una fuente inagotable de ejemplos y contraejemplos en muchas áreas de la matemática. Dicho conjunto es llamado el **conjunto de Cantor**, debido al gran matemático George Cantor. El conjunto de Cantor es un ejemplo bien conocido de un conjunto cerrado de números reales el cual no tiene puntos aislados y es nunca denso en $\mathbb{R}$.

La construcción del conjunto de Cantor es a través de una sucesión infinita de pasos. Vamos a construir inductivamente los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
 C_0 &:= [0, 1] \\
 C_1 &:= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
 C_2 &:= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
 &\vdots \\
 &\vdots := \quad \vdots
 \end{aligned}$$

En otras palabras, comenzamos tomando el intervalo cerrado $C_0 = [0, 1]$. Luego dividimos este intervalos en tres y extraemos el intervalo del medio, esto nos da el conjunto $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Luego, a cada uno de los intervalos del conjunto C_1 lo dividimos en tres, y en cada uno de ellos extraemos el intervalo del medio, esto nos queda el conjunto $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Así continuamos sucesivamente. Véase la Figura 5.1. Luego, el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es la intersección de todos estos conjuntos C_n .

La definición anterior es intuitiva, necesitamos una definición formal y precisa del con-

junto de Cantor. Existen varias formas equivalentes de definir el conjunto de Cantor, y cada una de ellas es útil para probar diversas propiedades que tiene el conjunto de Cantor. Aquí, elegimos una de estas formas equivalentes que nos será de utilidad en gran medida. Comenzamos construyendo ciertos conjuntos de números naturales.

Sea $F_0 = \{1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$F_n := \{3s - 2, 3s : s \in F_{n-1}\}.$$

Por ejemplo,

$$F_1 = \{1, 3\}$$

$$F_2 = \{1, 3, 7, 9\}$$

$$F_3 = \{1, 3, 7, 9, 19, 21, 25, 27\}$$

$$\vdots = \vdots$$

Algunas propiedades de estos conjuntos son:

1. Para cada $n \geq 0$, F_n tiene 2^n elementos.
2. Para cada $n \geq 0$, $F_n \subseteq F_{n+1}$.

Dejamos la comprobación de estas propiedades a cargo del lector.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $s \in F_n$, definimos el siguiente intervalo cerrado:

$$I_s^n := \left[\frac{s-1}{3^n}, \frac{s}{3^n} \right].$$

Estamos listo para dar una definición formal del conjunto de Cantor.

Definición 5.25

El **conjunto de Cantor** (o también conocido como el **conjunto ternario de Cantor**) se define como

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

donde $C_0 = [0, 1]$, y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n := \bigcup_{s \in F_n} I_s^n.$$

El lector puede comprobar que para $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, la definición anterior nos da exactamente los conjuntos C_n dados al inicio de la sección.

Ahora nos dedicaremos a enunciar y probar algunas de las propiedades más básicas pero fundamentales del conjunto de Cantor. Aquí consideramos siempre a $\mathbb{R}$ con su topología usual.

Definición 5.26

Un conjunto A de un espacio topológico X es llamado **nunca denso** si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$. En palabras, A es nunca denso si el interior de su clausura es vacío.

Teorema 5.27

1. Cada C_n es cerrado.
2. $\mathcal{C}$ es cerrado.
3. Para cada $n \geq 0$, $C_{n+1} \subseteq C_n$.
4. Los extremos de los intervalos cerrados que conforman a C_n están todos en $\mathcal{C}$.
5. $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
6. $\mathcal{C}$ es compacto.
7. Cada cerrado C_n está formado por 2^n intervalos cerrados disjuntos.
8. Cada intervalo cerrado de C_n tiene longitud $\frac{1}{3^n}$.
9. $\mathcal{C}$ es totalmente desconexo.
10. $\mathcal{C}$ es un conjunto nunca denso en $\mathbb{R}$.
11. $\mathcal{C}$ no tiene puntos aislados.
12. $\mathcal{C}$ no es numerable.

Demostración. 1. Cada C_n es unión finita de intervalos cerrados. Por lo tanto, es cerrado.

2. $\mathcal{C}$ es cerrado por ser intersección de cerrados.

3. Vamos a probar que cada intervalo cerrado I_s^{n+1} que forma el conjunto C_{n+1} está incluido en un intervalo de C_n . Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $s \in F_{n+1}$. Entonces $s = 3t - 2$ o $s = 3t$ con $t \in F_n$.

Caso 1: $s = 3t - 2$. Por definición tenemos que $I_s^{n+1} = \left[\frac{s-1}{3^{n+1}}, \frac{s}{3^{n+1}} \right]$. Reemplazando, nos queda $s - 1 = 3t - 3$. Entonces, $I_s^{n+1} = \left[\frac{t-1}{3^n}, \frac{3t-2}{3^{n+1}} \right]$. Por otro lado, $\frac{3t-2}{3^{n+1}} \leq \frac{t}{3^n}$. Con lo

cual,

$$I_s^{n+1} = \left[\frac{t-1}{3^n}, \frac{3t-2}{3^{n+1}} \right] \subseteq \left[\frac{t-1}{3^n}, \frac{t}{3^n} \right] = I_t^n.$$

Por lo tanto, $C_{n+1} \subseteq C_n$.

4. Pensemos primero en los extremos 0 y 1. Si comenzamos la construcción del conjunto de Cantor, podemos observar que los extremos 0 y 1 están fijos, es decir, no desaparecen (ver la Figura 5.1). Entonces, $0, 1 \in C_n$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, $0, 1 \in \mathcal{C}$.

Ahora, con el mismo argumento, pensemos en cualquier intervalo $[a, b]$ que forma uno de los C_n . Como $a, b \in C_n \subseteq C_{n-1} \subseteq \dots \subseteq C_1 \subseteq C_0$, a y b están en todos los cerrados anteriores de C_n . Ahora, si continuamos la construcción de Cantor para C_{n+1} , tenemos que los extremos a y b no se eliminan, quedando fijos. Con lo cual, $a, b \in C_n$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, $a, b \in \mathcal{C}$.

5. Es consecuencia del ítem anterior.
6. Como $\mathcal{C}$ es un subespacio cerrado del espacio compacto $[0, 1]$, $\mathcal{C}$ es compacto.
7. Es consecuencia del hecho que cada conjunto F_n tiene 2^n elementos.
8. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s \in F_n$, $I_s^n = \left[\frac{s-1}{3^n}, \frac{s}{3^n} \right]$. Entonces, es claro que la longitud de I_s^n es $\frac{1}{3^n}$.
9. Recordemos que los únicos subespacios conexos de $\mathbb{R}_u$ son los intervalos. Entonces, los únicos subespacios conexos posibles en $\mathcal{C}$ son los intervalos y los conjuntos unipuntuales. Veamos que ningún intervalo (a, b) está incluido en $\mathcal{C}$. Supongamos por absurdo que $(a, b) \subseteq \mathcal{C}$. Entonces, $(a, b) \subseteq C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como cada C_n es unión finita de intervalos cerrados disjuntos, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, (a, b) está incluido en un único intervalo I_s^n de C_n . Esto es, $(a, b) \subseteq I_s^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero como $\ell(I_s^n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ (pues, $\ell(I_s^n) = \frac{1}{3^n}$), tenemos un absurdo.
10. Como ya sabemos que $\mathcal{C}$ es cerrado, debemos probar que el interior de $\mathcal{C}$ es vacío. Si el interior de $\mathcal{C}$ fuera no vacío, debería existir un intervalo abierto (a, b) tal que $(a, b) \subseteq \mathcal{C}$. En el ítem anterior probamos que esto no es posible. Por lo tanto, $\mathcal{C}^\circ = \emptyset$.
11. Sea $x \in \mathcal{C}$. Esto es, $x \in C_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{x\}$ fuera un abierto de $\mathcal{C}$, se debería cumplir que existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \mathcal{C} \subseteq \{x\}$. Veamos que esto no es posible para ningún $\epsilon > 0$. Sea $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$. Tenemos que $x \in C_n = \bigcup_{s \in F_n} I_s^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $s \in F_n$ tal que $x \in I_s^n$.

Como la longitud del intervalo I_s^n es $\frac{1}{3^n}$ y $\frac{1}{3^n} < \epsilon$, tenemos que $I_s^n \subseteq (x - \epsilon, x + \epsilon)$, ver la Figura ???. Luego, el intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ contiene los extremos del intervalo I_s^n (que también pertenecen a $\mathcal{C}$). Con lo cual $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Entonces, $\{x\}$ no es abierto. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ no tiene puntos aislados.

12. Es consecuencia del item anterior y la Proposición 5.18. ■

Por el punto 10. podemos decir que el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es en cierto sentido “grande”, ya que es infinito no numerable. Pero en otro sentido, podemos decir que $\mathcal{C}$ es “pequeño”. Por ejemplo, por lo probado en el punto 9. $\mathcal{C}$ no contiene ningún intervalo abierto (a, b) por más chico que sea el intervalo. Otro argumento, de por qué $\mathcal{C}$ es pequeño es el siguiente. Observemos que las longitudes de los intervalos del medio que se van eliminando en cada paso de la construcción de $\mathcal{C}$ son:

$$\frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{9} \right) + 4 \left(\frac{1}{27} \right) + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Es decir que la longitud de lo que queda al eliminar los intervalos del medio es 0. Esto tiene un significado preciso en teoría de la medida de Lebesgue, donde se dice que $[0, 1] - \mathcal{C}$ tiene medida 1 y que $\mathcal{C}$ tiene por lo tanto medida 0.

5.4. Espacios localmente compactos y Compactificación

Como ya hemos visto, no todo espacio es compacto. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ con su topología usual no es compacto. Pero sin embargo $\mathbb{R}$ tiene una propiedad “local” de compacidad en el siguiente sentido. Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe un conjunto compacto A de $\mathbb{R}$ tal que $x \in A^\circ$. De hecho, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un intervalo abierto (a, b) tal que $x \in (a, b)$. Y $(a, b) = [a, b]^\circ$ y $[a, b]$ es un subespacio compacto de $\mathbb{R}$.

Definición 5.28

Un espacio X se dice que es **localmente compacto** en un punto $x \in X$, si existe un subespacio compacto K de X tal que $x \in K^\circ$. Un espacio X se dice **localmente compacto** si es localmente compacto en cada uno de sus puntos.

Veremos que compacidad local, está estrechamente vinculada a la condición de compacidad. Primero, podemos observar que todo espacio compacto es de hecho localmente compacto.

Ejemplo 5.29. Como ya vimos, $\mathbb{R}$ es un espacio localmente compacto. ■

Ejemplo 5.30. El espacio producto $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existen $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$ tal que

$$x \in (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subseteq [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

y el espacio $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es compacto por ser producto de compactos. ■

Ejemplo 5.31. El espacio $\mathbb{R}^\omega$ no es localmente compacto. Véase el Ejercicio 5.26. ■

Ejemplo 5.32. El subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}_u$ no es localmente compacto. Supongamos que si lo es. Sea $q \in \mathbb{Q}$. Entonces, existe un subespacio compacto K de $\mathbb{Q}$ ($K \subseteq \mathbb{Q}$) y un intervalo (a, b) tal que $q \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq K$. Como $K \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, K es también un subespacio compacto de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es Hausdorff, K es un cerrado de $\mathbb{R}$, es decir, $\bar{K} = K$. Ahora tomemos un número irracional $x \in [a, b]$ y una sucesión (q_n) de racionales en (a, b) tal que $q_n \rightarrow x$. Es decir, $(q_n) \subseteq (a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq K$ y $q_n \rightarrow x$. Entonces, $x \in \bar{K} = K$. Luego x es irracional y $x \in K \subseteq \mathbb{Q}$, lo cual es absurdo. ■

El siguiente teorema es el resultado clave para la relación entre los conceptos de compacidad y compacidad local.

Teorema 5.33

Sea X un espacio topológico. Entonces, X es Hausdorff y localmente compacto si y sólo si existe un espacio Y tal que:

(P1) X es subespacio de Y ;

(P2) $Y - X = \{\infty\}$;

(P3) Y es Hausdorff y compacto.

Además, si Y e Y' son dos espacios que cumplen las tres condiciones anteriores, entonces existe un homeomorfismo $f: Y \rightarrow Y'$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in X$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es un espacio Hausdorff localmente compacto. Vamos a construir el espacio Y . Sea ∞ un objeto cualquier que no pertenezca a X . Sea $Y := X \cup \{\infty\}$. Ahora procedemos a definir una topología τ sobre Y . τ estará formada por conjuntos de dos tipos: estará formada por:

(1) todos los subconjuntos abiertos $U \subseteq X$ de X ; y

(2) todos los conjuntos de la forma $Y - C$ con C un subespacio compacto de X .

Entonces, afirmamos que τ es una topología sobre Y (queda a cargo del lector comprobar esto). Procedemos a probar que Y satisface los tres puntos correspondientes.

(P1) Sea V un abierto de Y . Entonces, $V = U$ con U abierto de X o $V = Y - C$ con C un compacto de X . Entonces,

$$X \cap V = \begin{cases} X \cap U = U & \text{es abierto de } X \\ 0 & \\ X \cap (Y - C) = X - C & \text{es abierto de } X \end{cases}$$

(C es compacto de X y X es Hausdorff, entonces C es cerrado de X). Recíprocamente, si U es abierto de X , entonces $U = U \cap X$ con U es abierto de Y (por definición de la topología de Y).

(P2) Es obvio por definición de Y .

(P3) Veamos que Y es compacto. Sea $\mathcal{A} = \{V_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ un cubrimiento abierto de Y . La colección $\mathcal{A}$ debe contener al menos un abierto del tipo (2), es decir, contener un abierto de la forma $Y - C$ con C compacto de X , ya que ninguno de los abiertos de Y del tipo (1) contiene al elemento ∞ . Entonces, $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha \cup (Y - C)$. Con lo cual $C \subseteq \bigcup_\alpha V_\alpha$. Luego $C \subseteq \bigcup_\alpha (V_\alpha \cap X)$. Como C es compacto de X , $C \subseteq (V_{\alpha_1} \cap X) \cup \dots \cup (V_{\alpha_n} \cap X)$. Entonces, $Y \subseteq (V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}) \cup (Y - C)$. Por lo tanto, Y es compacto.

Probemos que Y es Hausdorff. Sean $x, y \in Y$, $x \neq y$. Si $x, y \in X$, entonces por ser X Hausdorff si tiene que existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $x \in U$ e $y \in V$. Por definición de la topología sobre Y , U y V son abiertos de Y . Supongamos que $x \in X$ e $y = \infty$. Como X es localmente compacto, existe un compacto $C \subseteq X$ tal que $x \in C^\circ \subseteq C$. Entonces, C° y $Y - C$ son abiertos disjuntos de Y tales que $x \in C^\circ$ e $y = \infty \in Y - C$. Por lo tanto, Y es Hausdorff.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe un espacio Y que cumple las tres condiciones del teorema. Como X es subespacios de Y e Y es Hausdorff, tenemos que X es Hausdorff. Veamos que X es localmente compacto. Sea $x \in X$. Como $x \neq \infty$, sean U y V abiertos disjuntos de Y tales que $x \in U$ y $\infty \in V$. Sea $C := Y - V$, el cual es cerrado de Y . Luego C es compacto, por ser Y compacto. Como $C \subseteq X \subseteq Y$, C es también un subespacio compacto de X , y se tiene que $x \in U \subseteq C$ (lo cual implica que $x \in C^\circ$).

Finalmente, probemos la última afirmación del teorema. Sean Y e Y' dos espacios que cumplen las condiciones (P1)–(P3). Digamos que $Y - X = \{y_0\}$ e $Y' - X = \{z_0\}$. Definimos

la función $f: Y \rightarrow Y'$ como: para todo $x \in X$, $f(x) = x$; y $f(y_0) = z_0$. Es claro que f es una función biyectiva y su función inversa es la función $g: Y' \rightarrow Y$ definida por $g(x) = x$ para todo $x \in X$, y $g(z_0) = y_0$. Sólo resta probar que f y g son continuas. Equivalentemente, sólo resta probar que f y g son funciones abiertas. Probemos que f es abierta. Sea U un abierto de Y .

- Si $y_0 \notin U$, entonces $U \subseteq X$ es un abierto de X y $f(U) = U$. Como $Y' - X = \{z_0\}$ es un cerrado de Y' (por ser Y' de Hausdorff), tenemos que $X = Y' - \{z_0\}$ es abierto de Y' . Así tenemos que $U \subseteq X$ es abierto de X y X abierto de Y' . Entonces, $U = f(U)$ es abierto de Y' .
- Supongamos que $y_0 \in U$. Sea $C := Y - U$. Entonces, C es cerrado de Y y $C \subseteq X$. Como Y es compacto, C es compacto de Y y así también de X . Como X es subespacio de Y' , C es también un subespacio compacto de Y' . Luego, por ser Y' Hausdorff, C es cerrado de Y' . Entonces $f(U) = Y' - C$ es abierto de Y' . Análogamente, se prueba que g es una función abierta. Por lo tanto, f (y también g) es un homeomorfismo. ■

Observación 5.34. Cuando el espacio X ya es compacto, un espacio Y cumpliendo las tres condiciones del teorema anterior no es interesante ya que se obtiene añadiendo a X un único punto aislado ∞ . Esto significa que los abiertos del nuevo espacio $Y = X \cup \{\infty\}$ son los abiertos de X , el conjunto unipuntual $\{\infty\}$ y uniones de abiertos de X con $\{\infty\}$ (véase el Ejercicio 5.27). Sin embargo, cuando X no es compacto, entonces el punto $\infty \in Y - X$ es un punto límite de X , y por lo tanto $\overline{X} = Y$ (véase el Ejercicio 5.28). En otras palabras, X es denso en Y .

Definición 5.35

Sea X un espacio topológico. Diremos que un espacio Y es una **compactificación** de X si:

- (Co1) Y es un espacio Hausdorff compacto;
- (Co2) X es subespacio propio de Y ;
- (Co3) X es denso en Y (es decir, $\overline{X} = Y$).

Si $Y - X$ consiste de un único punto, diremos que Y es una **compactificación por un punto** de X .

Teorema 5.36: Compactificación por un punto

Un espacio X admite una compactificación por un punto si y sólo si X es Hausdorff y localmente compacto pero no compacto.

Demostración. Por definición de compactificación y el Teorema 5.33. ■

Notemos que el Teorema 5.33, no sólo nos dice que todo espacio Hausdorff localmente compacto X , el cual no es compacto, tiene una compactificación por un punto, sino también que todas las compactificaciones por un punto de X son homeomorfas entre ellas. Es decir, si Y e Y' son dos compactificaciones por un punto de X , entonces los espacios Y e Y' son homeomorfos. Esto se resume diciendo que la compactificación por un punto es única, salvo homeomorfismo.

Ejemplo 5.37. Sabemos que $\mathbb{R}$ es Hausdorff, localmente compacto y no compacto. Entonces existe su compactificación por un punto. ¿Cuál será? Consideremos el círculo de centro $(0, 1/2)$ y radio $1/2$, el cual denotamos por S . Se puede probar que $S - \{(0, 1)\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ bajo la función $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1 - \{(0, 1)\}$ definida por $f(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}, \frac{x^2}{1+x^2}\right)$ (véase el Ejercicio 5.31). Entonces, la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, es homeomorfa a S , es decir, $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S$. ■

Proposición 5.38

Sea X un espacio Hausdorff. Entonces, X es localmente compacto si y sólo si para todo $x \in X$ y todo entorno U de x , existe un entorno V de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subseteq U$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que X es localmente compacto. Sea $x \in X$ y U un entorno de x . Como X es Hausdorff y localmente compacto, existe su compactificación por un punto Y . Sea $C := Y - U$. Luego, C es un cerrado de Y . Con lo cual, C es compacto. Como $x \notin C$, existen dos abiertos disjuntos V y W de Y tales que $x \in V$ y $C \subseteq W$. Como $V \cap C = \emptyset$, tenemos que $\bar{V} \cap C = \bar{V} \cap \bar{V} = \bar{\emptyset} = \emptyset$. Entonces, $\bar{V} \subseteq Y - C = U$. Además, como Y es compacto, $\bar{V}$ es compacto. Por lo tanto, V es un entorno de x tal que $\bar{V}$ es compacto y $\bar{V} \subseteq U$.

$(\Leftarrow)$ Sea $x \in X$. Entonces, por hipótesis (tomando $U := X$), existe un entorno V de x tal que $\bar{V}$ es compacto. Entonces, $x \in V \subseteq (\bar{V})^\circ$. Por lo tanto, X es localmente compacto. ■

5.5. La compactificación Stone-Čech

Ejercicios propuestos

Espacios compactos

Ejercicio 5.1. Sea $\mathcal{A} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Probar que $\mathcal{A}$ es un cubrimiento de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ que no contiene un subcubrimiento finito.

Ejercicio 5.2. Sea X un espacio topológico. Probar que todo subconjunto finito de X es un subespacio compacto de X .

Ejercicio 5.3. Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. Consideremos la topología $\tau_{x_0} = \{U \subseteq X : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$. Probar que el espacio $\langle X, \tau_{x_0} \rangle$ es compacto.

Ejercicio 5.4. Sea X un conjunto infinito. Sea τ_{cof} la topología cofinita sobre X . Probar que todo subconjunto de X es compacto.

Ejercicio 5.5. Probar que todo subespacio infinito de un espacio topológico discreto X no es compacto.

Ejercicio 5.6. Probar que una unión finita de subespacios compactos es también compacto.

Ejercicio 5.7. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de X . Probar que X es compacto si y sólo si cada cubrimiento abierto de X por abiertos básicos contiene un subcubrimiento finito.

Ejercicio 5.8. Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Probar que Y es un subespacio compacto de X si y sólo si Y es un espacio compacto con respecto a su topología subespacio τ_Y .

Ejercicio 5.9. Probar que el espacio producto $\mathbb{R}^n$ (con su topología usual) no es compacto.

Ejercicio 5.10. Probar que si E es compacto y F cerrado de un espacio X , entonces $E \cap F$ es un subespacio compacto de X .

Ejercicio 5.11. Sea $\{F_i : i \in I\}$ una colección de subespacios compactos y cerrados de un espacio topológico X . Probar que $\bigcap_{i \in I} F_i$ es un subespacio compacto de X .

Ejercicio 5.12. Sea X un espacio Hausdorff. Probar que si Y es un subespacio compacto de X y $x_0 \notin Y$, entonces existen abiertos U y V tales que $x_0 \in U$, $Y \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$.

(Pista: Utilizar un argumento similar a la prueba de la Proposición 5.7.)

Ejercicio 5.13. Sea X un espacio Hausdorff. Sean Y y Z subespacios compactos disjuntos de X . Probar que existen abiertos U y V de X tales que $Y \subseteq U$, $Z \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$.

(Pista: Utilizar el ejercicio anterior.)

Ejercicio 5.14. Sea X un espacio compacto y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que $f(X)$ es un subespacio compacto de Y .

Ejercicio 5.15. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Sea $f: X \rightarrow X$ una función continua. Probar que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X) \neq \emptyset$$

donde $f^0 = id$ y $f^n = f^{n-1} \circ f$.

Ejercicio 5.16. Sean X e Y espacios topológicos tal que $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$. Probar de dos formas distintas que si el espacio producto $X \times Y$ es compacto, entonces X e Y son compactos.

Ejercicio 5.17. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Sea $X = \{a, b\}$ con la topología indiscreta $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$. Considere el espacio producto $\mathbb{R} \times X$. Probar que los conjuntos

$$A = ([0, 1) \times \{a\}) \cup ([1, 2] \times \{b\}) \quad \text{y} \quad B = ([0, 1] \times \{a\}) \cup ((1, 2] \times \{b\})$$

son subespacios compactos de $\mathbb{R} \times X$, pero el conjunto $A \cap B$ no es compacto.

Ejercicio 5.18. Sean X e Y espacios topológicos. Probar que si Y es compacto, entonces la función proyección $p: X \times Y \rightarrow X$ es cerrada.

Ejercicio 5.19. Sea X un espacio métrico. Probar que cada subespacio compacto de X es acotado (con respecto a la distancia de X) y cerrado. Hallar un espacio métrico para el cual no todo subespacio cerrado y acotado sea compacto. (Indicación: Pensar en la distancia discreta.)

Ejercicio 5.20. Sea X un espacio compacto e Y un espacio Hausdorff. Probar que si $f: X \rightarrow Y$ es una función biyectiva y continua, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 5.21. Sea $\langle X, \tau_1 \rangle$ un espacio Hausdorff y sea $\langle X, \tau_1 \rangle$ un espacio compacto. Probar que si $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $\tau_1 = \tau_2$.

Ejercicio 5.22. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios topológicos. Probar que si el espacio producto $X := \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es compacto, entonces cada espacio coordenado X_α es compacto.

Ejercicio 5.23. Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X . Probar que si X es compacto, entonces el espacio cociente $X/\sim$ es compacto.

Ejercicio 5.24. Sean X e Y espacios compactos y Hausdorff y sea $f: X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. Se define la relación binaria $\sim$ sobre X por: para todos $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2).$$

Probar que el espacio cociente $X/\sim$ es homeomorfo a Y .

(Sug.: Véase la Proposición 2.19).

El teorema de Tychonoff

Ejercicio 5.25. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios topológicos. Sea $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos del espacio producto $X := \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ que tiene la PIF. Probar que:

- (a) Para cada $\alpha \in \Gamma$, la colección $\{\pi_\alpha(D) : D \in \mathcal{D}\}$ de subconjuntos del espacio X_α tiene la PIF.
- (b) Para cada $\alpha \in \Gamma$, la colección $\{\overline{\pi_\alpha(D)} : D \in \mathcal{D}\}$ de cerrados del espacio X_α tiene la PIF.

Espacios localmente compactos y compactificación

Ejercicio 5.26. Probar que el espacio producto $\mathbb{R}^\omega$ no es localmente compacto.

(Pista: Probar que ningún abierto básico de $\mathbb{R}^\omega$ está contenido en un subespacio compacto de $\mathbb{R}^\omega$).

Ejercicio 5.27. Sea X un espacio Hausdorff compacto. Sea Y un espacio que cumple las condiciones (P1)–(P3) del Teorema 5.33. Probar que los abiertos de Y son exactamente los abiertos de X , el conjunto unipuntual $\{\infty\}$ y los de la forma $U \cup \{\infty\}$ con U abierto de X .

Ejercicio 5.28. Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y sea Y un espacio satisfaciendo las condiciones (P1)–(P3) del Teorema 5.33. Probar que si X no es compacto, entonces $\overline{X} = Y$.

Ejercicio 5.29. Sea X un espacio localmente compacto. Probar que si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua y abierta, entonces $f(X)$ es un subespacio localmente compacto de Y .

Ejercicio 5.30. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia de espacios topológicos. Probar que el espacio producto $\prod X_\alpha$ es localmente compacto si y sólo si todos los espacios X_α son localmente compactos y todos los espacios X_α , salvo un número finito, son compactos.

Ejercicio 5.31. Sea S la circunferencia de centro el punto $(0, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$. Probar que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow S - \{(0, 1)\}$, definida por $f(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}, \frac{x^2}{1+x^2}\right)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ (con

su topología usual) sobre el subespacio $S - \{(0, 1)\}$ (subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con su topología usual).

(Indicación: Comprobar que la función $g: S - \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = \frac{x}{1-y}$ es la función inversa de f . Utilizando lo conocido en Análisis Real, justificar la continuidad de f y g .)

Ejercicio 5.32. Sean X_1 y X_2 dos espacios Hausdorff localmente compactos, y sean Y_1 e Y_2 las compactificaciones por un punto de X_1 y X_2 , respectivamente. Sea $f: X_1 \rightarrow X_2$ un homeomorfismo. Determinar cómo se extiende f a un homeomorfismo de Y_1 sobre Y_2 .

Ejercicio 5.33. Probar que la compactificación por un punto del subespacio $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}_u$ es homeomorfa al subespacio $X := K \cup \{0\}$ de $\mathbb{R}_u$, donde $K := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Ejercicio 5.34. Sea X un espacio localmente compacto. Probar que:

- (a) Si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F es un subespacio localmente compacto.
- (b) Si X es Hausdorff y $U \subseteq X$ es abierto, entonces U es localmente compacto.

Capítulo 6

Axiomas de numerabilidad y de separación

En este capítulo introduciremos una serie de axiomas para espacios topológicos y estudiaremos las propiedades que se deducen al asumir uno o más de ellos. Estos axiomas se dividen en dos grupos: los axiomas de numerabilidad y los de separación. Los axiomas de numerabilidad están referidos a condiciones sobre cardinalidad, y los axiomas de separación están referidos a la posibilidad de poder separar dos puntos distintos por abiertos, separar un punto de un conjunto cerrado, o la posibilidad de poder separar dos cerrados disjuntos por abiertos disjuntos.

6.1. Axiomas de numerabilidad

Recordemos aquí que un conjunto X se dice **numerable** si es finito o es infinito numerable. En caso contrario, diremos que es un conjunto no numerable, el cual es obviamente infinito.

Definición 6.1

Un espacio topológico X se dice que tiene una **base numerable en** $x \in X$ si existe una colección numerable $\mathcal{B}_x$ de entornos de x tales que cada entorno de x contiene uno de los elementos de $\mathcal{B}_x$.

En otras palabras,

Un espacio X tiene una **base numerable en** $x \in X$ si existe una colección numerable $\mathcal{B}_x$ de abiertos de X tal que:

1. $\forall B \in \mathcal{B}_x, x \in B$.
2. Si U es abierto de X y $x \in U$, entonces existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq U$.

Definición 6.2

Se dice que un espacio X satisface el **Primer Axioma de Numerabilidad (1°AN)** si tiene una base numerable en x , para cada $x \in X$.

Ejemplo 6.3. Todo espacio metrizable satisface el primer axioma de numerabilidad. En efecto, sea X un espacio metrizable con distancia d y sea $x \in X$. Entonces, se puede comprobar sin dificultad que la colección $\mathcal{B}_x = \left\{ B_d \left(x, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ es una base numerable en x . ■

Ejemplo 6.4. Sea X un conjunto infinito no numerable y sea τ_{cof} la topología cofinita sobre X . Entonces $\langle X, \tau_{\text{cof}} \rangle$ no satisface el 1°AN. En efecto, supongamos por absurdo que si lo satisface. Tomemos un punto arbitrario pero fijo x_0 de X . Entonces, por hipótesis, existe una base numerable $\mathcal{B}_{x_0} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ en x_0 . Ahora, como cada B_n es abierto de X , B_n^c es finito. Entonces el conjunto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c$ es unión numerable de conjuntos finitos. Con lo cual A es numerable. Como X es infinito no numerable, existe un $y \in X$ tal que $y \notin A$ e $y \neq x_0$. Entonces,

$$y \in A^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Esto es, $y \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado el conjunto $\{y\}^c$ es un abierto de X (pues su complemento es el conjunto finito $\{y\}$) y contiene a x_0 (porque $y \neq x_0$). Entonces, por ser $\mathcal{B}_{x_0}$ una base en x_0 , existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subseteq \{y\}^c$. Es decir, $y \notin B_m$, lo cual es una contradicción. ■

Aquí necesitamos recordar la definición de convergencia de una sucesión en espacios topológicos (Definición 1.61).

Proposición 6.5

Sea X un espacio y $A \subseteq X$.

- (1) Si existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A convergente a un punto x_0 , entonces $x_0 \in \overline{A}$.
- (2) Si X satisface el 1°AN y $x_0 \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a x_0 .

Demostración. (1) Supongamos que existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a un punto x_0 . Debemos probar que $x_0 \in \overline{A}$. Sea U un entorno de x_0 . Entonces, por la convergencia de la sucesión (x_n) , existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Entonces, $A \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x_0 \in \overline{A}$.

(2) Supongamos que X satisface el 1°AN. Sea $x_0 \in \overline{A}$. Sea $\mathcal{B}_{x_0} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de x_0 . Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos los entornos $B_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ del punto x_0 . Entonces la colección $\mathcal{B}'_{x_0} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es también una base numerable de x_0 . Además, se cumple que si $k \leq n$, entonces $B_n \subseteq B_k$. Ahora, como $x_0 \in \overline{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \cap A \neq \emptyset$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n \in B_n \cap A$. Así, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de A ¹. Probemos que converge a x_0 . Sea U un entorno de x_0 . Luego, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subseteq U$. Con lo cual, para todo $n \geq m$, tenemos que $a_n \in B_n \subseteq B_m \subseteq U$. Entonces $a_n \in U$ para todo $n \geq m$. Por lo tanto, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0 . ■

Proposición 6.6

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función del espacio X en el espacio Y .

- (1) Si f es continua, entonces para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto x_0 , la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$.
- (2) Sea X un espacio que satisface el 1°AN. Si se cumple que para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto x_0 se tiene que la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto $f(x_0)$, entonces f es continua.

Demostración. (1) A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.3.

(2) Supongamos que X satisface el 1°AN. Supongamos que se cumple que para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto x_0 se tiene que la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

¹Observemos que aquí para definir la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es necesario utilizar el Axioma de Elección.

al punto $f(x_0)$. Probemos que f es continua. Para ello usaremos el punto (2) del Teorema 1.76. Sea $A \subseteq X$. Debemos probar que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $x \in \overline{A}$. Por (2) de la Proposición 6.6 existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a x . Entonces, por hipótesis, la sucesión $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto $f(x)$. Luego, por (1) de la Proposición 6.6, obtenemos que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Entonces $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, y por lo tanto, f es continua. ■

Ahora pasamos a presentar el segundo axioma sobre numerabilidad.

Definición 6.7

Diremos que un espacio X satisface el **Segundo Axioma de Numerabilidad (2°AN)** si tiene una base numerable.

Primero de todo, mostramos que el segundo axioma implica el primer axioma de numerabilidad.

Proposición 6.8

Todo espacio que satisface el 2°AN satisface también el 1°AN.

Demostración. Sea X un espacio que satisface el 2°AN. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X . Sea $x \in X$. Sea $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. Como $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_x$ es numerable. Además es director chequear que $\mathcal{B}_x$ es una base numerable para x . ■

Ejemplo 6.9.

- (1) $\mathbb{R}_u$ satisface el 2°AN. En efecto, no es difícil comprobar que $\mathcal{B} = \{(s, t) : s, t \in \mathbb{Q} \text{ y } s < t\}$ es una base numerable de $\mathbb{R}$.
- (2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio producto $\mathbb{R}^n$ satisface el 2°AN. En efecto, la colección

$$\mathcal{B} = \{(s_1, t_1) \times \cdots \times (s_n, t_n) : s_i, t_i \in \mathbb{Q} \text{ y } s_i < t_i\}$$

es una base numerable de $\mathbb{R}^n$. ■

Ejemplo 6.10. Sea X con la topología discreta. Entonces, X es un conjunto numerable si y sólo si el espacio discreto X satisface el 2°AN. En efecto:

($\Rightarrow$) Supongamos que X es numerable. Entonces la colección $\{\{x\} : x \in X\}$ es una base numerable del espacio discreto X .

($\Leftarrow$) Supongamos que el espacio discreto X satisface el 2°AN. Supongamos por absurdo que X no es numerable. Sea $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de X . Como $U_n \neq \emptyset$ para

todo $n \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in U_n$. Consideremos el conjunto $U = X - \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como X es un espacio discreto, U es abierto de X . Además, como X es no numerable tenemos que $U \neq \emptyset$. Entonces, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_n \subseteq U$. Lo cual es absurdo. Por lo tanto, X es numerable. ■

Basados en el ejemplo anterior, podemos dar un ejemplo de un espacio que satisface el 1°AN , pero no el 2°AN .

Ejemplo 6.11. Sea X un espacio discreto no numerable. El espacio discreto X satisface el 1°AN , pues para cada $x \in X$, la colección $\{\{x\}\}$ es una base numerable en x de X . Pero, por el ejemplo anterior, X no satisface el 2°AN . ■

Proposición 6.12

- (1) Todo subespacio de un espacio que satisface el 1°AN satisface el 1°AN . El producto numerable de espacios que satisfacen el 1°AN satisface el 1°AN .
- (2) Todo subespacio de un espacio que satisface el 2°AN satisface el 2°AN . El producto numerable de espacios que satisfacen el 2°AN satisface el 2°AN .

Demostración. (1) A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.6.

(2) Sea Y un subespacio del espacio X que satisface el 2°AN . Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X . Entonces, claramente $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base numerable de Y .

Sea ahora $\{X_i : i \in I\}$ una familia numerable de espacios que satisfacen el 2°AN . Para cada $i \in I$, sea $\mathcal{B}_i$ una base numerable del espacio X_i . Sabemos que la colección de todos los productos $\prod_{i \in I} U_i$ tal que $U_i \in \mathcal{B}_i$ para un número finito de índices i y $U_i = X_i$ para el resto de índices, es una base del espacio producto $X = \prod_{i \in I} X_i$. Llamemos $\mathcal{B}_P$ a esta base de X . En otras palabras,

$$\mathcal{B}_P = \left\{ \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} X_i \times U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k} : i_1, \dots, i_k \in I \text{ y } U_{i_1} \in \mathcal{B}_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{B}_{i_k} \right\}.$$

Sólo nos resta probar que $\mathcal{B}_P$ es numerable. Para ello, observemos que podemos escribir a $\mathcal{B}_P$ como

$$\mathcal{B}_P = \bigcup_{\bar{k} \in \mathbb{A}} \mathcal{B}_{\bar{k}}$$

donde

- $\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^n$. Entonces, $\mathbb{A}$ es unión numerable de conjuntos numerables, por lo tanto, $\mathbb{A}$ es también numerable.

- Para cada $\bar{k} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{A}$, sea $\mathcal{B}_{\bar{k}}$ la colección de todos los productos $\prod_{i \in I} U_i$ tal que $U_{i_1} \in \mathcal{B}_{i_1}, \dots, U_{i_n} \in \mathcal{B}_{i_n}$, y $U_i = X_i$ para todo $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$. Es decir,

$$\mathcal{B}_{\bar{k}} = \left\{ \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_n\}} X_i \times U_{i_1} \times \dots \times U_{i_n} : U_{i_1} \in \mathcal{B}_{i_1}, \dots, U_{i_n} \in \mathcal{B}_{i_n} \right\}.$$

Notemos que para cada $\bar{k} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{A}$, $\mathcal{B}_{\bar{k}}$ es biyectivo a $\mathcal{B}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{i_n}$. Entonces, para cada $\bar{k} \in \mathbb{A}$, $\mathcal{B}_{\bar{k}}$ es numerable. En conclusión, obtuvimos que a $\mathcal{B}$ lo podemos escribir como una unión numerable de conjuntos numerables, por lo tanto, $\mathcal{B}$ es numerable. ■

Recordemos la definición de conjunto denso. Un subespacio D de un espacio X es llamado **denso** si $\overline{D} = X$. Es decir, un subespacio D de un espacio X es denso si y sólo si para cada abierto (básico, si X tiene una base) no vacío U de X , se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$ (véase la Proposición 1.52). Ahora presentamos dos axiomas más sobre numerabilidad.

Definición 6.13

1. Un espacio X es llamado de **Lindelöf** si todo cubrimiento abierto de X contiene un subcubrimiento numerable.
2. Un espacio X es llamado **separable** si existe un subconjunto numerable denso de X .

Ejemplo 6.14.

1. Notar que todo espacio compacto es de Lindelöf. Veamos un ejemplo de un espacio que no es Lindelöf. Sea $\mathbb{R}$ con la topología discreta. Entonces $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$. Pero no contiene ningún subcubrimiento numerable, porque implicaría que $\mathbb{R}$ es numerable, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\mathbb{R}$ con la topología discreta no es Lindelöf (compare con el Ejercicio 6.16).
2. $\mathbb{R}$ con la topología usual es separable porque $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. En cambio, si consideramos a $\mathbb{R}$ con la topología discreta, no es separable. En efecto, en todo espacio discreto se tiene que todo subconjunto es abierto y cerrado, entonces para cada $A \subseteq \mathbb{R}$, $\overline{A} = A$. Con lo cual el único subconjunto de $\mathbb{R}$ cuya clausura sea $\mathbb{R}$ es el mismo $\mathbb{R}$, es decir, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, pero $\mathbb{R}$ no es numerable. ■

No es verdad que todo subespacio de un espacio Lindelöf es de Lindelöf (véase el Ejercicio 6.18). Tampoco es verdad que el producto de espacios de Lindelöf es de Lindelöf (véase el Ejercicio 6.19). Tampoco es verdad que todo subespacio de un espacio separable es separable

(véanse los Ejercicios 6.25 y 6.26). En cambio, el producto numerable de espacios separables si es un espacio separable (véase el Ejercicio 6.25).

Proposición 6.15

Si X es un espacio que satisface el 2°AN , entonces X es de Lindelöf y separable.

Demostración. Sea X un espacio que satisface el 2°AN . Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in J\}$ una base numerable de X .

• Probemos que X es de Lindelöf. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X . Sea

$$J_0 = \{n \in J : \exists U \in \mathcal{A} \text{ tal que } B_n \subseteq U\}.$$

Como $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X , existe un abierto no vacío $U \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B}$ es una base, existe un $n \in J$ tal que $B_n \subseteq U$. Con lo cual $n \in J_0$, y así $J_0 \neq \emptyset$. Ahora, para cada $n \in J_0$, elijamos un $U_n \in \mathcal{A}$ tal que $B_n \subseteq U_n$. Sea $\mathcal{A}_0 = \{U_n : n \in J_0\}$. Es claro que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ y que J_0 es numerable. Veamos que $X = \bigcup \mathcal{A}_0$. Sea $x \in X$. Entonces existe un $U \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe un $n \in J$ tal que $x \in B_n \subseteq U$. Con lo cual, $n \in J_0$. Entonces, $U_n \in \mathcal{A}_0$ y $x \in B_n \subseteq U_n$. Así $x \in \bigcup \mathcal{A}_0$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_0$ es un subcubrimiento numerable de X .

• Para cada $B_n \neq \emptyset$, elijamos un $x_n \in B_n$. Sea D el conjunto formado por los puntos x_n . Entonces, D es denso porque intersecta a cada abierto básico no vacío B_n de la base $\mathcal{B}$. ■

El siguiente ejemplo muestra que la recíproca de la proposición anterior no es verdad. Esto es, existen espacios que son de Lindelöf y separables y no satisfacen el 2°AN .

Ejemplo 6.16. El espacio $\mathbb{R}_S$ satisface el 1°AN , es de Lindelöf y es separable. Pero $\mathbb{R}_S$ no satisface el 2°AN . En efecto:

• Probemos que $\mathbb{R}_S$ satisface el 1°AN .

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces, no es difícil comprobar que $\mathcal{B}_x = \{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable en x .

• $\mathbb{R}_S$ es separable.

Es claro que cada abierto básico $[a, b)$ de $\mathbb{R}_S$ contiene al menos un número racional (en realidad contiene infinitos). Entonces $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}_S$.

• $\mathbb{R}_S$ es Lindelöf.

Es suficiente probar que cada cubrimiento abierto de $\mathbb{R}_S$ por elementos de la base $\mathcal{B}_\ell = \{[a, b) : a < b\}$ contiene un subcubrimiento numerable. Supongamos que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in J} [a_\alpha, b_\alpha)$$

es un cubrimiento por abierto básicos. Sea

$$C = \bigcup_{\alpha \in J} (a_\alpha, b_\alpha).$$

Probemos primero que el conjunto $\mathbb{R} - C$ es numerable. Para esto vamos a construir una función inyectiva de $\mathbb{R} - C$ en $\mathbb{Q}$ (que sabemos es numerable). Sea $x \in \mathbb{R} - C$. Luego $x \notin (a_\alpha, b_\alpha)$ para todo $\alpha \in J$. Como $x \in \mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in J} [a_\alpha, b_\alpha]$, existe $\beta \in J$ tal que $x = a_\beta$. Sea q_x un racional tal que $a_\beta < q_x < b_\beta$. Notemos que $(x, q_x) = (a_\beta, q_x) \subseteq (a_\beta, b_\beta) \subseteq C$. Esto implica que si $x, y \in \mathbb{R} - C$, con $x < y$, entonces $q_x < q_y$ (caso contrario tendríamos que $x < y < q_y \leq q_x$, con lo cual $y \in (x, q_x) \subseteq C$, lo cual es absurdo). Entonces, la función $f: (\mathbb{R} - C) \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = q_x$ es inyectiva. Por lo tanto, $\mathbb{R} - C$ es numerable. Ahora tomemos una indexación de $\mathbb{R} - C = \{x_i : i \in I\}$ con $I \subseteq \mathbb{N}$. Para cada $i \in I$, $x_i \in \mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in J} [a_\alpha, b_\alpha]$. Luego, para cada $i \in I$, existe $\alpha_i \in J$ tal que $x_i \in [a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}]$. Entonces $\mathbb{R} - C \subseteq \bigcup_{i \in I} [a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}]$ (es un cubrimiento abierto numerable de $\mathbb{R} - C$). Ahora volvamos al conjunto $C = \bigcup_{\alpha \in J} (a_\alpha, b_\alpha)$. Consideremos a C como un subespacio de $\mathbb{R}$ (con la topología usual de $\mathbb{R}$). Entonces, como $\mathbb{R}$ satisface el 2°AN, C satisface también el 2°AN. Con lo cual C es de Lindelöf. Entonces existe un subcubrimiento numerable $\mathcal{A} \subseteq \{(a_\alpha, b_\alpha) : \alpha \in J\}$ de C . Digamos $\mathcal{A} = \{(a_k, b_k) : k \in K\}$ con $K \subseteq \mathbb{N}$. Entonces

$$\mathbb{R} = C \cup (\mathbb{R} - C) \subseteq \bigcup_{k \in K} (a_k, b_k) \cup \bigcup_{i \in I} [a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}] \subseteq \bigcup_{k \in K} [a_k, b_k] \cup \bigcup_{i \in I} [a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}]$$

Como I y K son numerables, $\{(a_k, b_k) : k \in K\} \cup \{[a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}] : i \in I\}$ es un subcubrimiento numerable de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}_S$ es Lindelöf.

• Finalmente probemos que $\mathbb{R}_S$ no satisface el 2°AN.

Veamos que ninguna base de $\mathbb{R}_S$ es numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}_S$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos que el intervalo $[x, x+1)$ es un abierto (básico) de $\mathbb{R}_S$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$. Con lo cual $\min B_x = x$. Ahora para $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq y$, tenemos que $B_x \neq B_y$ (caso contrario, si $B_x = B_y$, entonces $x = \min B_x = \min B_y = y$, absurdo). Esto implica que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ definida por $f(x) = B_x$ es inyectiva. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ no es numerable. ■

6.2. Axiomas de separación

Desde un punto de vista intuitivo los *axiomas de separación* sobre un espacio X determinan si el espacio X tiene suficientes abiertos para separar puntos de puntos, puntos de conjuntos cerrados, o conjuntos cerrados de conjuntos cerrados.

Definición 6.17

Un espacio topológico X es llamado T_0 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un conjunto abierto U que contiene exactamente a uno de estos puntos.

Equivalentemente,

Un espacio X es llamado T_0 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, o bien existe un abierto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$, o bien existe un abierto V tal que $y \in V$ y $x \notin V$.

Observación 6.18. En un espacio T_0 puede ocurrir que haya dos puntos distintos x e y tales que, por ser T_0 , existe un abierto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$, pero que todo abierto V que contiene a y también contiene a x , véase la Figura ?? . Ver el Ejemplo 6.19.

Ejemplo 6.19. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y sea $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, X\}$. Este espacio es T_0 . En efecto,

- $a \neq b \implies \exists \{b\} \in \tau$ tal que $a \notin \{b\}$ y $b \in \{b\}$.
- $a \neq c \implies \exists \{a, b\} \in \tau$ tal que $a \in \{a, b\}$ y $c \notin \{a, b\}$.
- $a \neq d \implies \exists \{a, b\} \in \tau$ tal que $a \in \{a, b\}$ y $d \notin \{a, b\}$.
- $a \neq e \implies \exists \{a, b\} \in \tau$ tal que $a \in \{a, b\}$ y $e \notin \{a, b\}$.
- $b \neq c \implies \exists \{a, b\} \in \tau$ tal que $b \in \{a, b\}$ y $c \notin \{a, b\}$.
- $b \neq d \implies \exists \{a, b\} \in \tau$ tal que $b \in \{a, b\}$ y $d \notin \{a, b\}$.
- $b \neq e \implies \exists \{a, b\} \in \tau$ tal que $b \in \{a, b\}$ y $e \notin \{a, b\}$.
- $c \neq d \implies \exists \{a, b, c\} \in \tau$ tal que $c \in \{a, b, c\}$ y $d \notin \{a, b, c\}$.
- $c \neq e \implies \exists \{a, b, c\} \in \tau$ tal que $c \in \{a, b, c\}$ y $e \notin \{a, b, c\}$.
- $d \neq e \implies \exists \{a, b, c, d\} \in \tau$ tal que $d \in \{a, b, c, d\}$ y $e \notin \{a, b, c, d\}$.

Observemos que en este espacio todo abierto que contiene al punto a también contiene al punto b . Es decir, no existe un abierto U tal que $b \in U$ y $a \notin U$, sin embargo como ya probamos, este espacio es T_0 (vea la Observación 6.18). ■

Ejemplo 6.20. Casi todos los espacios estudiados hasta el momento son T_0 . El lector puede comprobar que los espacios $\mathbb{R}_u, \mathbb{R}_S, R_K, \langle X, \tau_{\text{cof}} \rangle, \dots$ son todos T_0 . ■

Ejemplo 6.21. Sea X un conjunto y sea $X_0 \subseteq X$ tal que $\#(X - X_0) > 1$. Definimos

$$\tau = \{U : U \subseteq X_0\} \cup \{X\}.$$

Entonces, τ es una topología sobre X y el espacio $\langle X, \tau \rangle$ no es T_0 . En efecto, sean $a, b \in X - X_0$ distintos. Entonces el único abierto que contiene a a es X , el cual también contiene a b . Es decir, no existe un abierto que contenga sólo a uno de a y b . ■

Definición 6.22

Un espacio X es llamado T_1 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un abierto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

En otras palabras,

Un espacio X es T_1 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U y V tales que $x \in U \wedge y \notin U$, y $x \notin V \wedge y \in V$.

Lo primero que uno puede preguntarse es ¿cuál es la diferencia entre la definición de espacio T_0 y espacio T_1 ? A primera vista puede parecer que es la misma definición enunciada de forma distinta. Pero no es así, son distintas. Véase la Observación 6.18.

Ejemplo 6.23. Sea X un conjunto con al menos dos elementos. Sea $x_0 \in X$ y consideremos la topología

$$\tau_{x_0} = \{U \subseteq X : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

El espacio $\langle X, \tau_{x_0} \rangle$ es T_0 pero no T_1 . Veamos primero que es T_0 . Sean $x, y \in X$ distintos. Si ambos de ellos son distintos de x_0 , entonces $\{x, x_0\}$ es un abierto que contiene a x y no a y . En cambio si x o y es igual a x_0 , por ejemplo $x = x_0$, entonces $\{x_0\}$ es un abierto de X que contiene a $x = x_0$ pero no a y . Así probamos que para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existe un abierto que contiene exactamente a uno de ellos. Ahora veamos que $\langle X, \tau_{x_0} \rangle$ no es un espacio T_1 . Sea $x \in X$ tal que $x \neq x_0$. Es verdad que existe el abierto $\{x_0\}$ que contiene a x_0 y no a x . Pero para ser T_1 debe existir también un abierto que contenga a x y no a x_0 . Pero por definición de la topología τ_{x_0} , todo abierto no vacío contiene a x_0 . Por lo tanto, $\langle X, \tau_{x_0} \rangle$ no es T_1 . ■

Ejemplo 6.24. El espacio $\langle X, \tau \rangle$ del Ejemplo 6.19 no es T_1 . En efecto, $a \neq b$, pero no existe $U \in \tau$ tal que $b \in U$ y $a \notin U$. ■

Proposición 6.25

Todo espacio T_1 es T_0 .

Demostración. Es directo por las definiciones. ■

Observemos que el espacio del Ejemplo 6.23 es un contraejemplo que muestra que la recíproca de la proposición anterior no es verdad, es decir, un espacio T_0 no es necesariamente T_1 .

Teorema 6.26

Un espacio X es T_1 si y sólo si para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado de X .

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que X es T_1 . Sea $x \in X$. Probemos que

$$\{x\} = \bigcap \{U^c : U \in \tau \text{ y } x \notin U\}.$$

Para cada $U \in \tau$ tal que $x \notin U$, tenemos que $x \in U^c$. Entonces $x \in \bigcap \{U^c : U \in \tau \text{ y } x \notin U\}$. Esto es, $\{x\} \subseteq \bigcap \{U^c : U \in \tau \text{ y } x \notin U\}$. Ahora sea $y \in \bigcap \{U^c : U \in \tau \text{ y } x \notin U\}$. Supongamos que $y \notin \{x\}$. Entonces existe un abierto U tal que $y \in U$ y $x \notin U$. Con lo cual, $y \notin U^c$ y $x \in U^c$. Como $x \in U^c$, se tiene que $y \in U^c$, lo cual es absurdo. Entonces $y \in \{x\}$. Por lo tanto, $\bigcap \{U^c : U \in \tau \text{ y } x \notin U\} \subseteq \{x\}$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado de X . Sean $x, y \in X$ distintos. Entonces, $\{x\}^c$ es un abierto de X tal que $y \in \{x\}^c$ y $x \notin \{x\}^c$. Análogamente, $\{y\}^c$ es un abierto de X tal que $x \in \{y\}^c$ y $y \notin \{y\}^c$. Por lo tanto, X es T_1 . ■

Recordemos ahora un concepto con el cual ya hemos estado trabajando (véase en la pag. 27), el cual es uno de los axiomas de separación más importante.

Definición 6.27

Un espacio X es llamado de **Hausdorff** o **T_2** si para todo par de puntos x e y distintos de X existen dos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$, y $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 6.28. Todo espacio métrico $\langle X, d \rangle$ es de Hausdorff (T_2). Sean $x \neq y$ elementos de X . Sea $\epsilon := \frac{d(x, y)}{2} > 0$. Entonces, tomando $U := B_d(x, \epsilon)$ y $V := B_d(y, \epsilon)$, tenemos que $x \in U$, $y \in V$, y $U \cap V = \emptyset$. ■

Proposición 6.29

Todo espacio de Hausdorff (T_2) es un espacio T_1 .

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff y sean $x, y \in X$ distintos. Entonces, por ser X de Hausdorff existen dos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$, y $U \cap V = \emptyset$. Entonces, como U y V son disjuntos, se tiene que $x \in U$ e $y \notin U$, y también $y \in V$ y $x \notin V$. Por lo tanto, X es T_1 . ■

La recíproca de la proposición anterior no es verdad. Es decir, hay espacios que son T_1 pero no de Hausdorff (T_2).

Ejemplo 6.30. Sea X un conjunto infinito con la topología cofinita. Entonces X es T_1 pero no es Hausdorff. Probemos primero que X es T_1 . Sean $x, y \in X$ distintos. Como sabemos los conjuntos $\{x\}$ y $\{y\}$ son cerrados de X (véase ??). Entonces $\{x\}^c$ y $\{y\}^c$ son abiertos de X tales que

$$(y \in \{x\}^c \text{ y } x \notin \{x\}^c) \quad \text{y} \quad (x \in \{y\}^c \text{ y } y \notin \{y\}^c).$$

Por lo tanto, X es T_1 . Ahora veamos que X no es Hausdorff. Lo que vamos a probar es que la intersección de cualesquiera dos conjuntos abiertos no vacíos es no vacía. Sean U y V abiertos no vacíos. Obviamente, si al menos uno de ellos es X , entonces $U \cap V \neq \emptyset$. Supongamos que U y V no son X . Como U y V son abiertos, U^c y V^c son finitos. Como X es infinito, existe un elemento $z \in X$ tal que $z \notin U^c$ y $z \notin V^c$ (caso contrario $X = U^c \cup V^c$ y sería finito). Entonces $z \in U$ y $z \in V$. Es decir que $U \cap V \neq \emptyset$. Con lo cual, para dos elementos distintos de X no podemos encontrar dos abiertos disjuntos. Por lo tanto, X no es Hausdorff. ■

Definición 6.31

Un espacio X es llamado **regular** o **T_3** si es T_1 y para cada cerrado A de X y cada $x_0 \notin A$, existen dos abiertos U y V de X tales que $x_0 \in U$, $A \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$.

Proposición 6.32

Todo espacio regular es de Hausdorff.

Demostración. Sea X un espacio regular. Sean $x, y \in X$ distintos. Como X es en particular T_1 , tenemos que el conjunto unipuntual $\{y\}$ es cerrado de X (véase el Teorema 6.26), y como $x \neq y$, se tiene que $x \notin \{y\}$. Entonces, por ser X regular, existen dos abiertos disjuntos U y V de X tales que $x \in U$ e $\{y\} \subseteq V$. Es decir, $y \in V$. Por lo tanto, X es de Hausdorff. ■

Ejemplo 6.33. El espacio $\mathbb{R}_K$ (véase la página 14) es Hausdorff, pero no regular. Recordemos

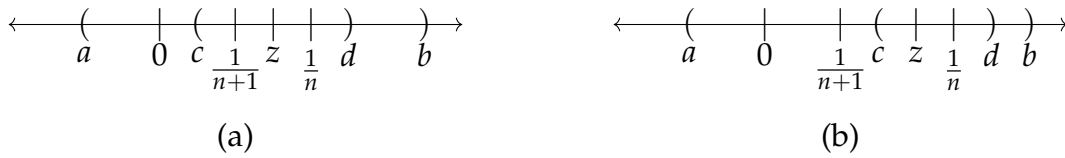


Figura 6.1

que la topología de $\mathbb{R}_K$ es generada por la base

$$\mathcal{B}_K = \{(a, b) : a < b\} \cup \{(a, b) - K : a < b\}.$$

Es sencillo comprobar que $\mathbb{R}_K$ es Hausdorff. Veamos que $\mathbb{R}_K$ no es regular. Sabemos que el conjunto $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}_K$ (véase el Ejercicio 1.38) y $0 \notin K$. Supongamos, por absurdo, que existen abiertos disjuntos U y V de $\mathbb{R}_K$ tales que $0 \in U$ y $K \subseteq V$. Sea $B \in \mathcal{B}_K$ tal que $0 \in B \subseteq U$. Como $K \cap U = \emptyset$, tenemos que B tiene que ser de la forma $B = (a, b) - K$. Esto es, $0 \in (a, b) - K \subseteq U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b$. Como $\frac{1}{n} \in K \subseteq V$, tomemos un abierto básico (c, d) tal que $\frac{1}{n} \in (c, d) \subseteq V$. Ahora tomemos un z tal que $\max\left\{c, \frac{1}{n+1}\right\} < z < \frac{1}{n}$, ver la Figura 6.1. Entonces $z \in (a, b) - K \subseteq U$ y $z \in (c, d) \subseteq V$. Entonces $z \in U \cap V$, absurdo!. Por lo tanto, no existen abiertos disjuntos que separen a 0 y a K . Con lo cual, X no es regular. ■

Definición 6.34

Un espacio X es llamado **normal** o T_4 si es T_1 y para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos A y B de X existen dos abiertos U y V de X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 6.35. La recta Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ (véase la página 14) es normal. Es sencillo comprobar que $\mathbb{R}_S$ es T_1 . Sean A y B subconjuntos cerrados y disjuntos del espacio $\mathbb{R}_S$. Para cada $a \in A$, tenemos que $a \notin B$. Luego, para cada $a \in A$, $a \in B^c$. Como B^c es abierto de $\mathbb{R}_S$, existe un abierto básico $[a, x_a)$ tal que $a \in [a, x_a) \subseteq B^c$. Entonces, para cada $a \in A$, se tiene que $[a, x_a) \cap B = \emptyset$. Análogamente, para cada $b \in B$, existe un abierto básico $[b, x_b)$ tal que $[b, x_b) \cap A = \emptyset$. Sean

$$U := \bigcup_{a \in A} [a, x_a) \quad \text{y} \quad V := \bigcup_{b \in B} [b, x_b).$$

Tenemos que U y V son abiertos de $\mathbb{R}_S$, y tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Sólo resta probar que $U \cap V = \emptyset$. Para ello vamos a probar que para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $[a, x_a) \cap [b, x_b) = \emptyset$ (lo cual implica, por definición de U y V , que $U \cap V = \emptyset$). Sean $a \in A$ y



Figura 6.2

$b \in B$. Tenemos que $a < b$ o $b < a$.

- Si $a < b$, entonces $a < b < x_b$. Ahora tenemos que $x_a \leq b$ o $b < x_a$. Si $b < x_a$, entonces $b \in [a, x_a] \cap B = \emptyset$ (ver la Figura 6.2 (a)). Absurdo! Entonces $x_a \leq b$. Con lo cual $[a, x_a] \cap [b, x_b] = \emptyset$ (ver la Figura 6.2 (b)).
- Si $b < a$, se obtiene de forma análogamente que $[a, x_a] \cap [b, x_b] = \emptyset$.

Por lo tanto, $\mathbb{R}_S$ es normal. ■

Proposición 6.36

Todo espacio normal es regular.

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.52. ■

La siguiente proposición provee caracterizaciones útiles de los conceptos de espacios regulares y normales.

Proposición 6.37

Sea X un espacio T_1 . Entonces:

- (1) X es regular si y sólo si para todo $x \in X$ y todo entorno U de x , existe un entorno V de x tal que $\overline{V} \subseteq U$.
- (2) X es normal si y sólo si para todo cerrado A y todo abierto U que contiene a A , existe un conjunto abierto V que contiene a A y $\overline{V} \subseteq U$.

Ver la Figura ??.

Demostración. (1) $(\Rightarrow)$ Supongamos que X es regular. Sea $x \in X$ y U un entorno de x . Entonces U^c es cerrado y $x \notin U^c$. Como X es regular, existen abiertos V y W tales que $x \in V$, $U^c \subseteq W$, y $V \cap W = \emptyset$. Entonces $W^c \subseteq U$ y $V \subseteq W^c$. Luego, tomando clausura en la última inclusión obtenemos que $\overline{V} \subseteq \overline{W^c} = W^c$. Con lo cual $x \in V$ y $\overline{V} \subseteq W^c \subseteq U$.

$(\Leftarrow)$ Debemos probar que X es regular. Sea $x \in X$ y sea A un cerrado de X tal que $x \notin A$. Así $x \in A^c$ y A^c es abierto. Por hipótesis, se sigue que existe un entorno V de x tal que

$\bar{V} \subseteq A^c$. Luego $A \subseteq \bar{V}^c$, y $\bar{V}^c$ es abierto. Como $V \subseteq \bar{V}$, entonces $V \cap \bar{V}^c = \emptyset$. En resumen, V y $\bar{V}^c$ son dos abiertos disjuntos tal que $x \in V$ y $A \subseteq \bar{V}^c$. Por lo tanto, X es regular.

(2) A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.55. ■

Proposición 6.38

- (1) Todo subespacio de un espacio T_0 es T_0 , y el producto de espacios T_0 es T_0 .
- (2) Todo subespacio de un espacio T_1 es T_1 , y el producto de espacios T_1 es T_1 .
- (3) Todo subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff, y un producto de espacios Hausdorff es de Hausdorff.
- (4) Todo subespacio de un espacio regular es regular, y un producto de espacios regulares es regular.

Demostración. (1) A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.34.

(2) A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.40.

(3) A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.45.

(4) Sea X un espacio regular y sea $Y \subseteq X$ subespacio de X . Como X es T_1 , por (2) tenemos que Y también es T_1 . Sea ahora $y \in Y$ y sea G un cerrado de Y tal que $y \notin G$. Sabemos que existe un cerrado F de X tal que $G = F \cap Y$. Como $y \in Y$ y $y \notin G$, entonces $y \notin F$. Como X es regular, existen abiertos U y V de X tales que $y \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces, $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$ son abiertos de Y tales que $y \in U'$, $G = F \cap Y \subseteq V \cap Y = V'$, y $U' \cap V' = \emptyset$. Por lo tanto, Y es regular.

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios regulares. Vamos a probar que el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es regular utilizando la caracterización dada en la Proposición 6.37. Sea $\mathbf{x} \in \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ y sea $U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})$ un abierto básico del espacio producto tal que $\mathbf{x} \in U$. Entonces tenemos que $x_{\alpha_1} = \mathbf{x}(\alpha_1) \in U_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k} = \mathbf{x}(\alpha_k) \in U_{\alpha_k}$. Luego, por la regularidad de cada X_{α_i} y la Proposición 6.37, tenemos que para cada α_i con $i = 1, \dots, k$, existe un entorno V_{α_i} de x_{α_i} tal que $\overline{V_{\alpha_i}} \subseteq U_{\alpha_i}$. Sea $V := \pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(V_{\alpha_k})$. Es claro que V es un abierto (básico) de espacio producto tal que $\mathbf{x} \in V$, y

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \overline{\pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(V_{\alpha_k})} \subseteq \overline{\pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1})} \cap \cdots \cap \overline{\pi_{\alpha_k}^{-1}(V_{\alpha_k})} \subseteq \\ &\subseteq \pi_{\alpha_1}^{-1}(\overline{V_{\alpha_1}}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(\overline{V_{\alpha_k}}) \subseteq \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) = U. \end{aligned}$$

(para la primera inclusión véase la propiedad (4) de la Proposición 1.47 y para la segunda véase el Ejercicio 1.61). Por lo tanto, el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es regular. ■

El lector puede estar preguntándose, y conjeturando al mismo tiempo, que en el caso de espacios normales las afirmaciones de la proposición anterior no se cumplen. Es decir, un subespacio de un espacio normal no es necesariamente normal (véase el Ejemplo 6.60), y el producto (finito) de espacios normales no es tampoco necesariamente normal (véase el Ejemplo 6.53). Para dar estos ejemplos, necesitamos algunos resultados más. Así que los posponemos para más adelante.

Finalizamos esta sección probando que ciertas condiciones son suficientes para que un espacio sea normal.

Teorema 6.39

Todo espacio metrizable es normal.

Demostración. Sea X un espacio metrizable con distancia d . Sean A y B conjuntos cerrados disjuntos de X . Para cada $a \in A$, existe un $\epsilon_a > 0$ tal que $B_d(a, \epsilon_a) \cap B = \emptyset$. Para cada $b \in B$, existe un $\epsilon_b > 0$ tal que $B_d(b, \epsilon_b) \cap A = \emptyset$. Sean

$$U := \bigcup_{a \in A} B_d(a, \epsilon_a/2) \quad \text{y} \quad V := \bigcup_{b \in B} B_d(b, \epsilon_b/2).$$

Tenemos que U y V son abiertos de X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Probemos que U y V son disjuntos. Supongamos por absurdo que existe un $x \in U \cap V$. Entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x \in B_d(a, \epsilon_a/2) \cap B_d(b, \epsilon_b/2)$. Por la desigualdad triangular, tenemos que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{\epsilon_a}{2} + \frac{\epsilon_b}{2} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2}.$$

Si $\epsilon_a \leq \epsilon_b$, entonces $d(a, b) < \epsilon_b$. Entonces $a \in B_d(b, \epsilon_b) \cap A$, lo cual es absurdo. Entonces $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, X es normal. ■

Teorema 6.40

Todo espacio regular que satisface el segundo axioma de numerabilidad es normal.

Demostración. Sea X un espacio regular que satisface el segundo axioma de numerabilidad. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X . Debemos probar que X es normal. Sean A y B conjuntos cerrados disjuntos de X . Para cada $a \in A$, $a \notin B$. Es decir, para cada $a \in A$, se tiene que $a \in B^c$, el cual es abierto. Por la Proposición 6.37 (y el Ejercicio 6.49) tenemos que existe un básico $B_a \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B_a$ y $\overline{B_a} \subseteq B^c$, es decir, $\overline{B_a} \cap B = \emptyset$. Entonces $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B_a$ y $\overline{B_a} \cap B = \emptyset$ para todo $a \in A$. Ahora como $\{B_a : a \in A\} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es numerable, la familia $\{B_a : a \in A\}$ es numerable y puede indexarse con $\mathbb{N}$. Esto es, $\{B_a : a \in A\} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Observemos que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ y $\overline{B_n} \cap B = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De forma análoga podemos mostrar que existe una familia de abiertos básicos $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ y $\overline{C_n} \cap A = \emptyset$. Ahora construimos los siguiente conjuntos: para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

$$B'_n := B_n - \left(\bigcup_{i=1}^n \overline{C_i} \right) \quad \text{y} \quad C'_n := C_n - \left(\bigcup_{i=1}^n \overline{B_i} \right).$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, B'_n y C'_n son abiertos (por ser diferencia de un abierto por un cerrado, véase el Ejercicio 1.33). Sean

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B'_n \quad \text{y} \quad V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C'_n.$$

Entonces, U y V son abiertos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Veamos finalmente que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos por absurdo que existe un $x \in U \cap V$. Entonces existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que

$$x \in B'_k = B_k - \left(\bigcup_{i=1}^k \overline{C_i} \right) \quad \text{y} \quad x \in C'_n = C_n - \left(\bigcup_{i=1}^n \overline{B_i} \right).$$

Supongamos que $k \leq n$. Por un lado tenemos que $x \in B_k \subseteq \overline{B_k}$. Por otro lado, tenemos que $x \notin \left(\bigcup_{i=1}^n \overline{B_i} \right)$. Como $k \leq n$, tenemos que $x \notin \overline{B_k}$. Absurdo! Entonces $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, X es normal. ■

Teorema 6.41

Todo espacio Hausdorff compacto es normal.

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff compacto. Sean A y B conjuntos cerrados y disjuntos de X . Como X es compacto, A y B son compactos. Como A y B son compactos disjuntos y X es Hausdorff, existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$ (véase el Ejercicio 5.13). Por lo tanto, X es normal. ■

6.3. Lema de Urysohn y el teorema de extensión de Tietze

Esta sección está dedicada a dos resultados muy importantes de topología, los cuales son el Lema de Urysohn (el cual será fundamental en la sección siguiente) y el Teorema de Tietze. El Lema de Urysohn establece que en un espacio normal todo par de conjuntos cerrados disjuntos se pueden separar por una función continua (ver más abajo la formulación precisamente del Lema). Y el Teorema de Tietze establece que toda función continua sobre un subespacio cerrado y a valores reales puede extenderse de forma continua a todo el espacio.

Teorema 6.42: Lema de Urysohn

Sea X un espacio normal y sean A y B conjuntos cerrados disjuntos de X . Entonces, existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ y $B \subseteq f^{-1}(\{1\})$.

Demostración. Vamos a seguir los siguientes pasos.

Paso 1: Sea $P = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Vamos a construir una familia de abiertos $\{U_p : p \in P\}$ tal que cumpla la condición

$$\text{Si } p < q, \text{ entonces } U_p \subseteq \overline{U_p} \subseteq U_q. \quad (6.1)$$

Como P es numerable, podemos colocar a los elementos de P en una sucesión. Por conveniencia elegimos que los dos primeros términos de la sucesión sean 1 y 0. Vamos a definir a la familia $\{U_p : p \in P\}$ inductivamente. Para el primer término de la sucesión, que es 1, sea

$$U_1 := B^c = X - B.$$

Ahora, como A es cerrado y $A \subseteq U_1$, entonces por ser X normal, existe un abierto U_0 tal que $A \subseteq U_0$ y $\overline{U_0} \subseteq U_1$ (véase la Proposición 6.37). Sea P_n el conjunto formado por los primeros n términos de la sucesión. Supongamos (hipótesis inductiva) que los abiertos U_p con $p \in P_n$ están definidos y cumplen la condición (6.1). Sea r el término $n + 1$ de la sucesión, y sea $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Como $r \neq 0, 1$, r tiene en P_n un predecesor inmediato s^2 y un sucesor inmediato t . Entonces, por la hipótesis inductiva, los abiertos U_s y U_t están ya definidos y cumplen la condición (6.1), es decir, $\overline{U_s} \subseteq U_t$. Entonces, por la normalidad de X , existe un abierto U_r tal que

$$\overline{U_s} \subseteq U_r \quad \text{y} \quad \overline{U_r} \subseteq U_t. \quad (6.2)$$

Comprobemos que la condición (6.1) se cumple para cada par de elementos en $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$.

- Si $s_1, s_2 \in P_n$ y $s_1 < s_2$, entonces (6.1) se cumple por la hipótesis inductiva.
- Si $p \in P_n$, entonces tenemos dos casos posibles:
 - Si $p < r$, entonces $p \leq s^3$. Con lo cual $\overline{U_p} \subseteq \overline{U_s} \subseteq U_r$.
 - $r < p$, entonces $t \leq p^4$. Con lo cual $\overline{U_r} \subseteq U_t \subseteq U_p$.

Por lo tanto, la condición (6.1) se cumple para todo par de elementos en P_{n+1} .

² s es predecesor inmediato de r en P_n si $s < r$ y no existe otro elemento x de P_n tal que $s < x < r$.

³Por ser s predecesor inmediato de r

⁴Por ser t sucesor inmediato de r .

Paso 2: Extendemos la familia $\{U_p : p \in P\}$ a todos los números racionales. Sea $p \in \mathbb{Q}$. Si $p < 0$, sea $U_p = \emptyset$. Si $p > 1$, sea $U_p = X$. Es directo comprobar que la familia $\{U_p : p \in \mathbb{Q}\}$ sigue cumpliendo la condición (6.1).

Paso 3: Para cada $x \in X$ sea

$$Q(x) = \{p \in \mathbb{Q} : x \in U_p\}.$$

Observemos que por definición de la familia $\{U_p : p \in \mathbb{Q}\}$, para cada $x \in X$, $Q(x)$ no contiene ningún racional negativo y contiene todos los racionales mayores que 1. Esto es,

$$Q(x) \subseteq [0, +\infty) \quad \text{y} \quad (1, \infty) \cap \mathbb{Q} \subseteq Q(x)$$

para todo $x \in X$. Entonces, para cada $x \in X$, $Q(x)$ está acotado inferiormente por 0 y su ínfimo pertenece a $[0, 1]$. Ahora definimos la función $f: X \rightarrow [0, 1]$ por

$$f(x) = \inf Q(x).$$

Paso 4: Probemos que f es continua y cumple que $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ y $B \subseteq f^{-1}(\{1\})$. Si $x \in A \subseteq U_0$, entonces $x \in U_p$ para todo $p \geq 0$. Entonces $f(x) = \inf Q(x) = \inf[0, \infty) = 0$. Por lo tanto, $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$. Ahora sea $x \in B$. Entonces $x \notin X \setminus B = U_1$, entonces $x \notin U_p$ para todo $p \leq 1$. Con lo cual $Q(x) = (1, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Entonces $f(x) = \inf Q(x) = \inf(1, \infty) \cap \mathbb{Q} = 1$. Por lo tanto, $B \subseteq f^{-1}(\{1\})$. Finalmente probemos que f es continua. Necesitamos un resultado auxiliar.

Lema Auxiliar

(1) Si $x \in \overline{U_p}$, entonces $f(x) \leq p$.

(2) Si $x \notin U_p$, entonces $f(x) \geq p$.

Demostración del Lema Aux. (1) Supongamos que $x \in \overline{U_p}$. Entonces, por la condición (6.1), tenemos que $x \in U_q$, para todo $q > p$. Entonces $q \in Q(x)$ para todo $q > p$. Con lo cual $(p, \infty) \cap \mathbb{Q} \subseteq Q(x)$. Por lo tanto,

$$f(x) = \inf Q(x) \leq \inf(p, \infty) \cap \mathbb{Q} = p.$$

(2) Supongamos que $x \notin U_p$. Entonces, por la condición (6.1), tenemos que $x \notin U_q$ para todo $q \leq p$. Con lo cual $q \notin Q(x)$ para todo $q \leq p$. Esto implica que $Q(x) \subseteq (p, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Por lo tanto,

$$p = \inf(p, \infty) \cap \mathbb{Q} \leq \inf Q(x) = f(x). \quad \blacksquare$$

Ahora probamos que f es continua. Sea $x_0 \in X$ y sea (c, d) un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \in (c, d)$. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $f(x_0) \in (p, q) \subseteq (c, d)$. Por la condición (6.1), tenemos que $\overline{U_p} \subseteq U_q$. Sea $U := U_q - \overline{U_p}$, el cual es abierto. Como $f(x_0) < q$, entonces por (2) del Lema Auxiliar, $x_0 \in U_q$. Como $p < f(x_0)$, entonces por (1) del Lema Auxiliar, $x_0 \notin \overline{U_p}$. Con lo cual, $x_0 \in U$. Veamos que $f(U) \subseteq (c, d)$. Sea $x \in U = U_q - \overline{U_p}$. Entonces $x \in \overline{U_q}$. Por (1) del Lema Aux. tenemos que $f(x) \leq q$. Como $x \notin \overline{U_p}$, entonces $x \notin U_p$. Por (2) del Lema Aux. tenemos que $p \leq f(x)$. Entonces, obtuvimos que $f(x) \in [p, q] \subseteq (c, d)$ para todo $x \in U$. Con lo cual $f(U) \subseteq (c, d)$. Por lo tanto, f es continua. ■

La recíproca del Lema de Urysohn es también verdadera. Es decir, si X es un espacio tal que para todo par de conjuntos cerrados disjuntos A y B existe una función $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ y $B \subseteq f^{-1}(\{1\})$, entonces X es normal (véase el Ejercicio 6.62).

El Lema de Urysohn nos afirma que en todo espacio normal X , los conjuntos cerrados disjuntos pueden separarse por funciones continuas. Y además, que esta propiedad caracteriza el axioma de normalidad. Pero en el lugar de separar conjuntos cerrados disjuntos por funciones continuas, podríamos pensar separar conjuntos cerrados de puntos (igual que en la definición del axioma de regularidad) por funciones continuas. Esto nos lleva a la siguiente definición, la cual plantea un nuevo axioma de separación.

Definición 6.43

Un espacio X es llamado **completamente regular** ($T_{3\frac{1}{2}}$) o **espacio Tychonoff** si es T_1 y para cada cerrado A de X y cada $x_0 \notin A$, existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ y $f(x_0) = 1$.

Observación 6.44. Observemos que si $f: X \rightarrow [0, 1]$ es una función continua tal que $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ y $f(x_0) = 1$, entonces también existe una función continua $g: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $A \subseteq g^{-1}(\{1\})$ y $g(x_0) = 0$. La función $\sigma(x) = -x + 1$ es continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces tomando $g := \sigma \circ f$ obtenemos la función deseada.

Proposición 6.45

Todo espacio normal es completamente regular.

Demostración. Es consecuencia del Lema de Urysohn. ■

Ejemplo 6.46. La proposición anterior nos proporciona diversos ejemplos de espacios completamente regulares, aquellos que ya sabemos que son normales. Si bien esto garantiza

la existencia de funciones continuas que separan cerrados de puntos, no nos ofrece una construcción explícita de las mismas. Por ejemplo, previamente probamos que todo espacio metrizable X (con métrica d) es normal y, por lo tanto, completamente regular. Dados un cerrado $A \subset X$ y un punto $x_0 \notin A$, sabemos que existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ que los separa. La pregunta natural es: ¿podemos definir dicha f de forma explícita? En este caso particular, sí. Considerar la función $f: X \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x_0, A)}$, donde tenemos que $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. La función f es una que cumple las condiciones requeridas. ■

La recíproca de la proposición anterior no es cierta. Es decir, hay espacios que son completamente regulares pero no normales. Para dar un ejemplo de esto, necesitamos el Teorema de Extensión de Tietze (Teorema 6.52), véase el Ejemplo 6.54.

Proposición 6.47

Todo espacio completamente regular es regular

Demostración. Sea X un espacio completamente regular. Sea A un cerrado de X y $x_0 \notin A$. Entonces existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ y $f(x_0) = 1$. Como los intervalos $[0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ son abiertos del espacio $[0, 1]$, y f es continua, obtenemos que $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ y $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ son abiertos de X . Además ellos son disjuntos (comprobar!). Como $\{0\} \subseteq [0, \frac{1}{2})$ y $1 \in (\frac{1}{2}, 1]$ tenemos que

$$A \subseteq f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right) \quad \text{y} \quad f(x_0) = 1 \in (\frac{1}{2}, 1] \implies x_0 \in f^{-1}\left((\frac{1}{2}, 1]\right).$$

Por lo tanto, X es regular. ■

Ejemplo 6.48. Dar un ejemplo de un espacio que sea regular, pero no completamente regular, lleva algo de tiempo, esfuerzo y cuyos argumentos consideramos que no son esenciales en este momento. El lector interesado en estos argumentos puede consultar el artículo [6]. Brevemente, podemos mencionar que en [6], se construye un espacio regular X conteniendo dos puntos p y q tales que para toda función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ a valores reales se tiene que $f(p) = f(q)$. Entonces el punto p no se puede separar del cerrado $\{q\}$ por una función continua. Con lo cual, X no es completamente regular. ■

Proposición 6.49

Todo subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular. El espacio producto de espacios completamente regulares es completamente regular.

Demostración. Sea X un espacio completamente regular y sea Y un subespacio de X . Sea B un cerrado de Y e $y_0 \in Y$ tal que $y_0 \notin B$. Entonces existe un cerrado A de X tal que $B = A \cap Y$. Tenemos que $y_0 \notin A$. Por ser X completamente regular, existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ y $f(y_0) = 1$. La restricción $f|_Y: Y \rightarrow [0, 1]$ es continua (véase la Proposición 1.85) y tenemos que

$$f|_Y(B) = f(B) \subseteq f(A) \subseteq \{0\} \implies B \subseteq f|_Y^{-1}(\{0\}) \quad \text{y} \quad f|_Y(y_0) = f(y_0) = 1.$$

Por lo tanto, Y es completamente regular.

Ahora sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios completamente regulares. Sea A un subconjunto cerrado del espacio producto $X := \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ y $\bar{b} \notin A$. Luego existe un abierto básicos $U := \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ tal que $\bar{b} \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. Tenemos que $b_{\alpha_1} \in U_{\alpha_1}, \dots, b_{\alpha_n} \in U_{\alpha_n}$, con lo cual $b_{\alpha_1} \notin U_{\alpha_1}^c, \dots, b_{\alpha_n} \notin U_{\alpha_n}^c$. Entonces para cada α_i , con $i = 1, \dots, n$, existe una función continua $f_{\alpha_i}: X_{\alpha_i} \rightarrow [0, 1]$ tal que $U_{\alpha_i}^c \subseteq f_{\alpha_i}^{-1}(\{0\})$ y $f_{\alpha_i}(b_{\alpha_i}) = 1$. Ahora, para cada $i = 1, \dots, n$, definimos las funciones $F_{\alpha_i} = f_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i}: \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha \rightarrow [0, 1]$. Notemos que todas las funciones F_{α_i} son continuas por ser composición de funciones continuas. Ahora definimos la función $F: \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha \rightarrow [0, 1]$ por:

$$F(\bar{x}) = F_{\alpha_1}(\bar{x}) \cdot \dots \cdot F_{\alpha_n}(\bar{x}).$$

Probemos que F es continua. La función $h: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por $h((x_1, \dots, x_n)) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ es continua⁵. También la función $\psi = (F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_n}): \prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha \rightarrow [0, 1]^n$ definida por $\psi(\bar{x}) = (F_{\alpha_1}(\bar{x}), \dots, F_{\alpha_n}(\bar{x}))$ es continua (usar la Proposición 2.14). Entonces, tenemos que $F = h \circ \psi$, es decir, F es continua por ser composición de funciones continuas. Finalmente, probemos que $F(\bar{b}) = 1$ y $A \subseteq F^{-1}(\{1\})$:

$$\begin{aligned} F(\bar{b}) &= F_{\alpha_1}(\bar{b}) \cdot \dots \cdot F_{\alpha_n}(\bar{b}) \\ &= (f_{\alpha_1} \circ \pi_{\alpha_1})(\bar{b}) \cdot \dots \cdot (f_{\alpha_n} \circ \pi_{\alpha_n})(\bar{b}) \\ &= f_{\alpha_1}(b_{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot f_{\alpha_n}(b_{\alpha_n}) \\ &= 1 \cdot \dots \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sea $\bar{a} \in A$. Entonces $\bar{a} \notin U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$. Con lo cual, existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{\alpha_i} \notin U_{\alpha_i}$. Luego $f_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}) = 0$. Entonces, $F(\bar{a}) = f_{\alpha_1}(a_{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot f_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}) \cdot \dots \cdot f_{\alpha_n}(a_{\alpha_n}) = 0$. ■

⁵Esto se puede probar usando sucesiones. Sea $(\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces, para cada $i = 1, \dots, n$, la sucesión $(x_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x_i . Entonces la sucesión $(x_{1k} \cdot \dots \cdot x_{nk})$ converge a $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$. Esto es, $(h((x_{1k}, \dots, x_{nk}))) \longrightarrow h((x_1, \dots, x_n))$.

Ahora nos abocamos a enunciar y probar el Teorema de Extensión Tietze, el cual afirma que toda función continua a valores reales $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con A un subespacio cerrado de un espacio normal X , puede extenderse a una función continua a valores reales $F: X \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, $F|_A = f$. Para probar este teorema, es necesario el Lema de Urysohn y un par de resultados auxiliares.

Lema 6.50: M-test de Weierstrass

Sea X un espacio topológico. Sean $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas para cada $n \in \mathbb{N}$ y tales que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, entonces $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (absolutamente) para todo $x \in X$, y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Demostración. Para cada $x \in X$ tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (absolutamente), por el test de comparación. Esto muestra que f está bien definida.

Ahora probemos que f es continua. Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Debemos probar que existe un entorno U de x_0 en X tal que $f(U) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$. Para $\epsilon > 0$, existe un N tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \frac{\epsilon}{4}$. Cada f_n es continua, entonces para cada $n = 1, \dots, N$, existe un entorno U_n de x_0 tal que $f_n(U_n) \subseteq B(f(x_0), \frac{\epsilon}{2N})$. Tomemos $U := U_1 \cap \dots \cap U_N$, el cual es un entorno de x_0 . Sea $x \in U$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{n=1}^N (f(x) - f(x_0)) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (f(x) - f(x_0)) \right| \\
 &\leq \sum_{n=1}^N |f(x) - f(x_0)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(x) - f(x_0)| \\
 &\leq \sum_{n=1}^N |f(x) - f(x_0)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(x)| + |f(x_0)| \\
 &< N \cdot \frac{\epsilon}{2N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(x)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(x_0)| \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} \\
 &= \epsilon.
 \end{aligned}$$

Entonces, $f(U) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$. Por lo tanto, f es continua en x_0 . ■

Lema 6.51

Sea X un espacio normal y A un subconjunto cerrado de X . Entonces, para todo número real positivo r y toda función continua $f: A \rightarrow [-r, r]$, existe una función continua $g: X \rightarrow [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}r$ para todo $x \in A$.

Demostración. Sean $A_1 := \{x \in A : f(x) \leq -\frac{r}{3}\}$ y $A_2 := \{x \in A : f(x) \geq \frac{r}{3}\}$. Como f es continua, tenemos que A_1 y A_2 son cerrados de A (véase el Ejercicio 1.68). Como A es cerrado de X , tenemos que A_1 y A_2 son también cerrados de X , y claramente son disjuntos. Entonces, por el Lema de Urysohn, existe una función continua $g: X \rightarrow [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ tal que $g(A_1) \subseteq \{-\frac{r}{3}\}$ y $g(A_2) \subseteq \{\frac{r}{3}\}$. Sea $x \in A$. Dividimos en casos:

- Si $x \in A_1$, entonces $-r \leq f(x) \leq -\frac{r}{3}$ y $g(x) = -\frac{r}{3}$. Entonces, $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}r$.
- Si $x \in A_2$, entonces $\frac{r}{3} \leq f(x) \leq r$ y $g(x) = \frac{r}{3}$. Entonces, $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}r$.
- Si $x \in A - (A_1 \cup A_2)$, entonces $-\frac{r}{3} < f(x) < \frac{r}{3}$ y $-\frac{r}{3} \leq g(x) \leq \frac{r}{3}$. Entonces, $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}r$. ■

Teorema 6.52: Teorema de Extensión de Tietze

Sea X un espacio normal y A un subconjunto cerrado de X . Entonces, toda función continua a valores reales $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ puede extenderse a una función continua $F: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración. Sea X un espacio normal, A un cerrado de X y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

Caso 1: Supongamos que $f: A \rightarrow [-1, 1]$. Vamos a probar que existe una función continua $g: X \rightarrow [-1, 1]$ que extiende a f . Vamos a realizar una construcción inductiva.

- Usando el Lema 6.51 (con $r = 1$), obtenemos una función continua $g_1: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ tal que para cada $x \in A$, $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$. Entonces $f - g_1: A \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$.
- Usando el Lema 6.51 (con $f - g_1$ y $r = \frac{2}{3}$), obtenemos una función continua $g_2: X \rightarrow [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ tal que para cada $x \in A$, $|f(x) - g_1(x) - g_2(x)| \leq \frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$. Entonces $f - (g_1 + g_2): A \rightarrow [-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}]$.
- Usando el Lema 6.51 (con $f - g_1 - g_2$ y $r = \frac{4}{9}$), obtenemos una función continua $g_3: X \rightarrow [-\frac{4}{27}, \frac{4}{27}]$ tal que para cada $x \in A$, $|f(x) - g_1(x) - g_2(x) - g_3(x)| \leq \frac{8}{27} = (\frac{2}{3})^3$. Entonces $f - (g_1 + g_2 + g_3): A \rightarrow [-\frac{8}{27}, \frac{8}{27}]$.
- Continuamos usando inducción: para cada n , existe una función continua $g_n: X \rightarrow$

$[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$ tal que $|f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ para cada $x \in A$.

Dado que $\sum_{i=1}^{\infty} |g_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} < \infty$, la serie $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ converge (absolutamente) para cada $x \in X$ y g es continua, por el M-test de Weierstrass.

Como $|g(x)| = |\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |g_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1$, obtenemos que $g: X \rightarrow [-1, 1]$. Veamos finalmente (para el Caso 1) que g extiende a f . Sea $x \in A$. Entonces, $|f(x) - g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n = 0$. Con lo cual, $f(x) = g(x)$.

Caso 2: Supongamos ahora que $f: A \rightarrow (-1, 1)$. Probamos que existe una función continua $g: X \rightarrow (-1, 1)$ que extiende a f . Ya que $f: A \rightarrow (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$, por el Caso 1, existe una función continua $G: X \rightarrow [-1, 1]$ que extiende a f . Sea $B := \{x \in X : G(x) = \pm 1\}$. Entonces A y B son cerrados disjuntos de X . Por el Lema de Urysohn, existe una función continua $h: X \rightarrow [-1, 1]$ tal que $B \subseteq h^{-1}(\{0\})$ y $A \subseteq h^{-1}(\{1\})$. Sea $g(x) = G(x)h(x)$. Entonces $g: X \rightarrow (-1, 1)$ es continua y extiende a f .

Caso 3: Supongamos finalmente que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $h: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ un homeomorfismo. Entonces $h \circ f: X \rightarrow (-1, 1)$ es continua. Por el Caso 2, existe una función continua $G: X \rightarrow (-1, 1)$ que extiende a $h \circ f$. Sea ahora $F := h^{-1} \circ G: X \rightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que F es continua y para cada $x \in A$, $F(x) = h^{-1}(G(x)) = h^{-1}((h \circ f)(x)) = f(x)$. Esto completa la prueba. ■

La recíproca del Teorema de Extensión de Tietze es verdad. Es decir, si toda función continua definida sobre un cerrado puede extenderse a una función continua sobre todo el espacio, entonces el espacio es normal, véase el Ejercicio 6.67.

Ahora tenemos las herramientas necesarias para dar un ejemplo de un espacio que no es normal, el cual sirve para ver algo del mal comportamiento de la condición de normalidad.

Ejemplo 6.53. Sea $\mathbb{R}_S$ la recta Sorgenfrey. Ya hemos probado que el espacio $\mathbb{R}_S$ es normal (véase el Ejemplo 6.35). Ahora probaremos que el espacio producto $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ (*plano Sorgenfrey*) no es normal.

Denotemos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S)$ el conjunto de todas las funciones continuas $f: \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}$ valores reales definidas sobre $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. El lector puede comprobar que el conjunto $D := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Entonces, por el Ejercicio ??, cada función continua $f: \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}$ a valores reales está completamente determinada por sus valores sobre el subconjunto denso $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ⁶. Denotamos también por $\mathcal{C}(D)$ el conjunto de todas las funciones continuas a valores reales definidas sobre $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Entonces, la función $\Phi: \mathcal{C}(\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S) \rightarrow \mathcal{C}(D)$ definida por $\Phi(f) = f|_D$ para cada $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S)$, es inyectiva. Entonces

$$\#(\mathcal{C}(\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S)) \leq \#(\mathcal{C}(D)) \leq \#(\mathbb{R}^D) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}. \quad (6.3)$$

⁶Es decir, si $f, g: \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}$ son tales que coinciden en $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, entonces $f = g$.

Ahora supongamos que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ es normal. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S : x + y = 1\}$. Entonces, A es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ con la topología discreta (comprobar!). Luego, toda función con dominio en A es continua. Denotamos por $\mathcal{C}(A)$ al conjunto de todas las funciones continuas a valores reales sobre A . Entonces tenemos que $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^A$ (pues A tiene la topología discreta). Como A es cerrado de $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, por el Teorema de Extensión de Tietze, tenemos que toda función (continua) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ puede extenderse a una función continua $F: \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, que la función $\Psi: \mathcal{C}(\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S) \rightarrow \mathcal{C}(A)$ definida por $\Psi(F) = F|_A$ para cada $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S)$ es sobreyectiva. Entonces,

$$\#(\mathcal{C}(\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S)) \geq \#(\mathcal{C}(A)) = \#(\mathbb{R}^A) = \mathfrak{c}^c = 2^c > \mathfrak{c}.$$

Lo cual es absurdo, por (6.3). Por lo tanto, $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ no es normal. ■

Ahora podemos ver que:

Ejemplo 6.54.

- El producto de espacios normales no es necesariamente normal: $\mathbb{R}_S$ es normal, pero $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ no es normal.
- Un espacio (completamente) regular no es necesariamente normal: $\mathbb{R}_S$ es (completamente) regular. Entonces $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ es (completamente) regular, pero $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ no es normal. ■

6.4. El teorema de metrización de Urysohn

Definición 6.55

Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ es llamada un **embebimiento** si f es continua, inyectiva, y $f: X \rightarrow f(X)$ es un homeomorfismo.

Observemos que $f: X \rightarrow Y$ es un embebimiento si f es continua, inyectiva, y la restricción $f: X \rightarrow f(X)$ es una función abierta del espacio X al subespacio $f(X)$ de Y . También, observemos que en este caso X es homeomorfo a un subespacio de Y .

Teorema 6.56: Teorema de metrización de Urysohn

Todo espacio regular que satisface el 2°AN es metrizable.

Demostración. Probaremos, por medio de varios pasos, que X es metrizable construyendo un embebimiento de X en un espacio metrizable.

Paso 1: Probaremos que existe una colección numerable de funciones continuas $f_n: X \rightarrow [0, 1]$ con la propiedad:

$$\forall x_0 \in X, \text{ y todo entorno } U \text{ de } x_0, \text{ existe un índice } n \text{ tal que } f_n(x_0) > 0 \text{ y } f_n(U^c) \subseteq \{0\}. \quad (6.4)$$

Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in I\}$ una base numerable de X . Sea

$$J_0 = \{(n, m) : \overline{B_n} \subseteq B_m\}.$$

Observemos que $J_0 \neq \emptyset$, pues al menos un $B_m \neq \emptyset$, entonces por ser X regular existe un básico B_n tal que $\overline{B_n} \subseteq B_m$. Con lo cual $(n, m) \in J_0$. Ahora, como X es regular y satisface el 2°AN , tenemos que X es normal.

Para cada $(n, m) \in J_0$, tenemos que $\overline{B_n} \subseteq B_m$, esto es, $\overline{B_n} \cap B_m^c = \emptyset$. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua $g_{n,m}: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g_{n,m}(\overline{B_n}) \subseteq \{1\}$ y $g_{n,m}(B_m^c) \subseteq \{0\}$. Comprobemos que la colección $\{g_{n,m} : (n, m) \in J_0\}$ cumple la propiedad (6.4). Sea $x_0 \in X$ y sea U un entorno de x_0 . Como $\mathcal{B}$ es una base, existe $B_m \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in B_m \subseteq U$. Como X es regular, existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in B_n$ y $\overline{B_n} \subseteq B_m \subseteq U$. Entonces $(n, m) \in J_0$ y $U^c \subseteq B_m^c$. Como $\overline{B_n} \subseteq B_m$, tenemos que $g_{n,m}(x_0) = 1 > 0$ y $g_{n,m}(U^c) \subseteq g_{n,m}(B_m^c) \subseteq \{0\}$.

Ahora como la colección $\{g_{n,m} : (n, m) \in J_0\}$ es numerable, podemos indexarla con $\mathbb{N}$, dándonos la colección deseada $\{f_n : n \in J_1\}$ ⁷.

Paso 2: Sea $\mathbb{R}^\omega$ con la topología producto. Definimos la función $F: X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ por: para cada $x \in X$,

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Esto es, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F(x)(n) = f_n(x)$. Probemos que F es un embebimiento.

- F es continua: Es consecuencia del hecho de que cada f_n es continua y que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \pi_n \circ F$ (véase el Teorema ??).
- F es inyectiva: Si $x \neq y$, entonces existe un entorno U de x tal que $y \notin U$. Luego existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) > 0$ y $f_n(U^c) \subseteq \{0\}$. Entonces $f_n(x) \neq f_n(y)$, con lo cual $F(x) \neq F(y)$.
- $F: X \rightarrow F(X)$ es abierta: Sea U un abierto de X . Debemos probar que $F(U)$ es un abierto del subespacio $F(X)$. Sea $z_0 \in F(U)$. Sea $x_0 \in U$ tal que $F(x_0) = z_0$. Por la propiedad (6.4), sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(x_0) > 0$ y $f_{n_0}(U^c) \subseteq \{0\}$. Sea $V := \pi_{n_0}^{-1}((0, \infty))$. Con lo cual V es un abierto de $\mathbb{R}^\omega$. Entonces $W := V \cap F(X)$ es un abierto de $F(X)$. Como

⁷En caso que el J_0 fuera finito, a partir de cierto n podemos considerar que $f_n = f_{n+1} = \dots$

$\pi_{n_0}(z_0) = \pi_{n_0}(F(x_0)) = f_{n_0}(x_0) > 0$, tenemos que $z_0 \in \pi_{n_0}^{-1}((0, \infty)) = V$. Luego $z_0 \in V \cap F(X) = W$. Veamos que $W \subseteq F(U)$. Sea $z \in W$. Entonces $z \in V = \pi_{n_0}^{-1}((0, \infty))$ y $z \in F(X)$. Con lo cual, existe $x \in X$ tal que $z = F(x)$. Como $\pi_{n_0}(z) \in (0, \infty)$, tenemos que $f_{n_0}(x) > 0$. Por definición de f_{n_0} , obtenemos que $x \in U$, y así $z = F(x) \in F(U)$. En resumen, probamos que existe un abierto W de $F(X)$ tal que $z_0 \in W \subseteq F(U)$. Por lo tanto, $F: X \rightarrow F(X)$ es abierto.

Por lo tanto, $F: X \rightarrow F(X)$ es un homeomorfismo, y así $F: X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ es un embebimiento.

Finalmente, como $\mathbb{R}^\omega$ es metrizable (véase el Teorema 3.9) y $F(X)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^\omega$, tenemos que $F(X)$ es metrizable. Entonces, como X es homeomorfo a $F(X)$, X es metrizable (véase el Ejercicio 3.3). ■

Observación 6.57. Por definición de $F(X)$ (en la prueba anterior) se tiene que $F(X) \subseteq [0, 1]^\omega$. Entonces, tenemos que $F: X \rightarrow [0, 1]^\omega$ es un embebimiento.

El siguiente resultado es una generalización del argumento utilizado en la prueba anterior para probar la metrización de un espacio regular que satisface el 2°AN.

Teorema 6.58: Teorema del embebimiento

Sea X un espacio T_1 . Sea $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una colección de funciones continuas $f_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la siguiente condición:

$$\forall x_0 \in X \text{ y para todo entorno } U \text{ de } x_0, \exists \alpha \in \Gamma \text{ tal que } f_\alpha(x_0) > 0 \text{ y } f_\alpha(U^c) \subseteq \{0\}. \quad (6.5)$$

Entonces, la función $F: X \rightarrow \mathbb{R}^\Gamma$ definida por $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in \Gamma}$ es un embebimiento.

Si cada $f_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$, entonces $F: X \rightarrow [0, 1]^\Gamma$ es un embebimiento.

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.68. ■

Proposición 6.59

Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) X es completamente regular.
- (2) Existe una colección $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ de funciones continuas $f_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ que satisface la siguiente condición:

$$\forall x_0 \in X \text{ y para todo entorno } U \text{ de } x_0, \exists \alpha \in \Gamma \text{ tal que } f_\alpha(x_0) > 0 \text{ y } f_\alpha(U^c) \subseteq \{0\}. \quad (6.6)$$

- (3) X es homeomorfo a un subespacio de $[0, 1]^\Gamma$, para algún conjunto de índices Γ .

Demostración. A cargo del lector. Véase el Ejercicio 6.69. ■

Ahora estamos en condiciones de mostrar que el axioma de normalidad no se preserva por subespacio, es decir, un subespacio de un espacio normal no es necesariamente normal. Pero lo que si es verdad, que todo subespacio *cerrado* de un espacio normal es normal (véase el Ejercicio 6.60).

Ejemplo 6.60. Consideremos la recta Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$. Sabemos que el espacio $\mathbb{R}_S$ es normal, entonces es también completamente regular. Luego, por la Proposición 6.49, tenemos que el espacio producto $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ es completamente regular. Entonces, por la Proposición anterior $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ es homeomorfo a un subespacio de $[0, 1]^\Gamma$, para algún conjunto de índices Γ . Es decir, existe un subespacio Y de $[0, 1]^\Gamma$ tal que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \cong Y$. Como el espacio $[0, 1]$ es Hausdorff y compacto, el espacio producto $[0, 1]^\Gamma$ es también Hausdorff y compacto (véase la Proposición 6.38 y el Teorema 5.23). Por lo tanto, por el Teorema 6.41, el espacio $[0, 1]^\Gamma$ es normal. Ahora, por el Ejemplo 6.53, sabemos que el espacio $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ no es normal. Por lo tanto, el subespacio Y no es normal. ■

Ejercicios propuestos

Axiomas de numerabilidad

Ejercicio 6.1. Sea X un espacio y $a \in X$. Sea $\mathcal{B}_a = \{B_1, B_2, \dots\}$ una base numerable del punto a . Suponga que $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$. Probar que si (x_n) es una sucesión tal que $x_n \in B_n$ para todo n , entonces (x_n) converge a a .

Ejercicio 6.2. Sea X un espacio y sea $x \in X$. Sea $\mathcal{B}_x$ una base numerable en x . Probar que existe una base numerable $\mathcal{C}_x = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ en x tal que si $n < k$, entonces $U_k \subseteq U_n$. En otras palabras, probar que toda base numerable en x se puede transformar en una base numerable decreciente en x .

Ejercicio 6.3. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que si la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X converge a un punto $x_0 \in X$, entonces la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de Y converge a $f(x_0)$.

Ejercicio 6.4. Probar que todo espacio discreto o trivial satisface el 1°AN .

Ejercicio 6.5. Considerar el espacio producto $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Sea $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Hallar una base numerable del punto (x, y) en $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

Ejercicio 6.6. (a) Sea X un espacio que satisface el 1°AN y sea $Y \subseteq X$. Probar que el subespacio Y de X satisface el 1°AN .

(b) Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia numerable de espacios que satisfacen el 1°AN . Probar que el espacio producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ satisface el 1°AN .

Ejercicio 6.7. Se dice que un espacio topológico X es un T_1 -espacio si todo conjunto unipuntual es cerrado. Un subconjunto A de X es llamado un *conjunto* G_δ de X si es igual a una intersección numerable de conjuntos abiertos de X . Probar que si X es un T_1 -espacio y satisface 1°AN , entonces cada conjunto unipuntual es un conjunto G_δ .

Ejercicio 6.8. Sea X un espacio que tiene una base numerable y sea Y un espacio topológico arbitrario. Probar que si $f: X \rightarrow Y$ es una función sobreyectiva, continua y abierta, entonces Y tiene también una base numerable.

Ejercicio 6.9. Sea Y un espacio que tiene una base numerable y sea X un espacio topológico arbitrario. Probar que si $f: X \rightarrow Y$ es una función inyectiva, continua y abierta, entonces X tiene también una base numerable.

Ejercicio 6.10. Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de un espacio X y sea $\mathcal{C}$ una base arbitraria de X .

(a) Probar que el conjunto $J = \{(n, m) : \exists C \in \mathcal{C} \text{ tal que } B_n \subseteq C \subseteq B_m\}$ es no vacío.

(b) Para cada par $(n, m) \in J$, se elige un $C_{(n, m)} \in \mathcal{C}$ tal que $B_n \subseteq C_{(n, m)} \subseteq B_m$. Probar que la colección $\mathcal{D} = \{C_{(n, m)} : (n, m) \in J\}$ es una base para X .

(c) Explicar con sus propias palabras lo que sea ha probado anteriormente.

Ejercicio 6.11. Sea X un espacio topológico con una base numerable $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos. Probar que $\mathcal{A}$ es numerable.

Ejercicio 6.12. Sea X un espacio que satisface el 2°AN . Sea A un subconjunto infinito no numerable de X . Probar que $A \cap A'$ es infinito no numerable.

Ejercicio 6.13. Probar que todo espacio compacto metrizable X satisface el 2°AN .

(Pista: Probar primero que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un cubrimiento finito de X por bolas de radio $1/n$.)

Ejercicio 6.14. Sea X un conjunto infinito con la topología τ_{cof} cofinita. Probar que X es de Lindelöf.

Ejercicio 6.15. Probar que todo subespacio cerrado de un espacio Lindelöf es de Lindelöf.

Ejercicio 6.16. Probar que un espacio X con la topología discreta es Lindelöf si y sólo si X es numerable.

Ejercicio 6.17. Probar que en un espacio Lindelöf todo conjunto cerrado cuyos puntos sean aislados es numerable.

Ejercicio 6.18. Sea $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, es decir, X es el conjunto de números reales más un elemento ∞ que no pertenezca a $\mathbb{R}$. Considerar la siguiente topología sobre X (comprobar!)

$$\tau = \{U \subseteq X : U \subseteq \mathbb{R}\} \cup \{X\}$$

Probar que:

- (a) $\langle X, \tau \rangle$ es compacto, y así de Lindelöf.
- (b) El subespacio $\mathbb{R}$ de X es discreto. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ como subespacio de X , no es de Lindelöf (justificar!).
- (c) ¿Qué conclusión puede obtener?

Ejercicio 6.19. Considerar el espacio producto $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ (el cual se llama el **plano de Sorgenfrey**) (véase el Ejercicio 1.19).

- (a) Probar que el subespacio $A = \{(x, y) : y = -x\}$ de $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ es cerrado, discreto y no numerable.

(b) Probar que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ no es Lindelöf.

(c) ¿Qué conclusión puede obtener del inciso anterior?

Ejercicio 6.20. Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que si X es de Lindelöf, entonces el subespacio $f(X)$ de Y es de Lindelöf.

Ejercicio 6.21. Probar que todo espacio metrizable que es de Lindelöf satisface el 2° AN.

Ejercicio 6.22. Probar que el espacio $\mathbb{R}_S$ no es metrizable.

Ejercicio 6.23. Sea τ_{cof} la topología cofinita sobre un conjunto X . Probar que X es un espacio separable.

Ejercicio 6.24. Probar que el espacio producto $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ es separable.

Ejercicio 6.25. Probar que:

(a) Todo subespacio cerrado de un espacio separable es separable.

(b) El producto numerable de espacios separables es separable.

Ejercicio 6.26. Hallar un espacio separable el cual contenga un subespacio no separable.

Ejercicio 6.27. Sean X e Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que si X es separable, entonces el subespacio $f(X)$ de Y es separable.

Ejercicio 6.28. Sea X un conjunto infinito no numerable. Sea $x_0 \in X$. Considerar la topología $\tau_{x_0} = \{U \subseteq X : U = \emptyset \text{ o } x_0 \in U\}$ (véase el Ejercicio ??). Probar que:

(a) X es separable.

(b) X no es de Lindelöf.

(c) X satisface el 1° AN.

Ejercicio 6.29. Considerar la topología

$$\tau_D := \{U \cup V : U \text{ es un abierto de } \mathbb{R}_u \text{ y } V \subseteq \mathbb{I}\}$$

sobre $\mathbb{R}$, donde $\mathbb{I}$ es el conjunto de números reales irracionales (recuerde que $\langle \mathbb{R}, \tau_D \rangle$ es llamada la recta dispersa, véase el Ejercicio 1.10.) Determinar si $\langle \mathbb{R}, \tau_D \rangle$

(a) satisface el 1° AN.

(b) satisface el 2°AN.

(c) es de Lindelöf.

(Pista: Use el hecho que existe un conjunto cerrado K de $\mathbb{R}_u$ tal que K es no numerable y $K \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.)

(d) es separable.

Ejercicio 6.30. Probar que todo espacio metrizable separable satisface el 2°AN.

Ejercicio 6.31. Sea X un espacio metrizable. Probar que X satisface el 2°AN si y sólo si X es separable si y sólo si X es de Lindelöf.

(Pista: Pruebe las implicaciones: X satisface el 2°AN $\implies X$ es separable $\implies X$ es de Lindelöf $\implies X$ satisface el 2°AN. Algunas implicaciones ya fueron probadas anteriormente.).

Ejercicio 6.32. En cada caso, nombrar uno o dos espacios topológicos que cumplan las condiciones mencionadas en cada ítem.

(a) Un espacio que satisfaga el 1°AN pero no el 2°AN.

(b) Un espacio que sea separable y de Lindelöf pero que no cumpla el 1°AN.

(c) Un espacio que sea separable, Lindelöf y cumpla el 1°AN pero no cumpla el 2°AN.

Ejercicio 6.33. Sea X un conjunto infinito no numerable y considerar la topología discreta sobre X . Para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar si es verdadera o falsa. Justifique su respuestas.

(a) X satisface el 1°AN.

(c) X es de Lindelöf.

(b) X satisface el 2°AN.

(d) X es separable.

Axiomas de separación

Ejercicio 6.34.

(a) Sea X un espacio T_0 . Probar que todo subespacio Y de X es T_0 .

(b) Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios. Probar que el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es T_0 si y sólo si para cada $\alpha \in \Gamma$, el espacio X_α es T_0 .

Ejercicio 6.35. Sea X un espacio topológico. Se define la siguiente relación binaria $\preceq$ sobre X como sigue:

$$x \preceq y \iff (\forall U \text{ abierto})(x \in U \implies y \in U).$$

- (a) Probar que la relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva.
- (b) Probar que para todos $x, y \in X$, se cumple que $x \preceq y \iff x \in \overline{\{y\}}$.
- (c) Probar que la relación $\preceq$ es antisimétrica si y sólo si el espacio X es T_0 .

Ejercicio 6.36. Sea $\mathbb{R}$ con la topología $\tau = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Probar que el espacio $\langle \mathbb{R}, \tau \rangle$ es T_0 pero no es T_1 .

Ejercicio 6.37. Sea X un espacio T_1 . Probar que todo subconjunto finito de X es cerrado.

Ejercicio 6.38. Probar que un espacio $\langle X, \tau \rangle$ es T_1 si y sólo si para cada $x \in X$,

$$\{x\} = \bigcap \{U \in \tau : x \in U\}.$$

Ejercicio 6.39. Sea X un espacio T_1 y sea $A \subseteq X$ finito. Probar que $A' = \emptyset$. Es decir, todo subconjunto finito de un espacio T_1 no tiene puntos de acumulación.

(Indicación: Recuerde que $\overline{A} = A \cup A'$, y el Ejercicio 6.37.)

Ejercicio 6.40.

- (a) Sea X un espacio T_1 . Probar que todo subespacio Y de X es T_1 .
- (b) Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios. Probar que el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es T_1 si y sólo si para cada $\alpha \in \Gamma$, el espacio X_α es T_1 .

Ejercicio 6.41. Probar que en todo espacio T_1 , todo subespacio finito tiene la topología discreta.

Ejercicio 6.42. Sean a_1, a_2, a_3 tres puntos distintos de un espacio Hausdorff. Probar que existen tres abiertos G_1, G_2, G_3 disjuntos dos a dos tales que $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$ y $a_3 \in G_3$.

Ejercicio 6.43. Sea $\mathbb{N}$ con la topología cofinita τ_{cof} . Probar que el espacio $\langle \mathbb{N}, \tau_{\text{cof}} \rangle$ es T_1 pero no es T_2 .

Ejercicio 6.44. Sea X un espacio Hausdorff. Probar que para cada $A \subseteq X$, se tiene que

$$A = \bigcap \{U : U \text{ abierto de } X \text{ y } A \subseteq U\}.$$

Ejercicio 6.45.

- (a) Sea X un espacio Hausdorff. Probar que todo subespacio Y de X es Hausdorff.
- (b) Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios. Probar que el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es Hausdorff si y sólo si para cada $\alpha \in \Gamma$, el espacio X_α es Hausdorff.

Ejercicio 6.46. Sea $i = 0, 1, 2$. Probar que la imagen continua de un espacio T_i no es necesariamente T_i .

Ejercicio 6.47. Sea X un espacio que satisface el primer axioma de numerabilidad. Si cada sucesión convergente de X tiene un único límite, entonces X es Hausdorff.

Ejercicio 6.48. Sea X un espacio T_0 tal que para todo subconjunto cerrado A de X y para todo $x_0 \notin A$, existen abiertos U y V de X tales que $x_0 \in U$, $A \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$. Probar que X es regular. (Es decir, sólo hay que probar que X es T_1 .)

Ejercicio 6.49. Sea X un espacio T_1 y sea $\mathcal{B}$ una base de X . Probar que X es regular si y sólo si para todo $x \in X$ y todo entorno U de x , existe un entorno básico $B \in \mathcal{B}$ de x tal que $\bar{B} \subseteq U$.

Ejercicio 6.50. Un espacio X es llamado $T_{5/2}$ si es T_1 y para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$, y $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

- (a) Probar que $T_3 \implies T_{5/2} \implies T_2$.
- (b) Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ y sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Sea

$$\mathcal{B} = \{B(\mathbf{a}, \epsilon) \cap S : \mathbf{a} \in S \setminus L \text{ y } \epsilon > 0\} \cup \{B(\mathbf{a}, \epsilon) \cap (S \setminus L) \cup \{\mathbf{a}\} : \mathbf{a} \in L \text{ y } \epsilon > 0\}.$$

$\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre S (no es necesario verificar esto). Comprobar gráficamente que S es $T_{5/2}$ pero no es T_3 .

- (c) Probar que todo subespacio de un espacio $T_{5/2}$ es $T_{5/2}$.
- (d) Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios topológicos. Probar que el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es $T_{5/2}$ si y sólo si cada espacio X_α es $T_{5/2}$.

Ejercicio 6.51.

- (a) Sea X un espacio T_3 . Probar que para cada cerrado A de X , se tiene que

$$A = \bigcap \{U : U \text{ abierto de } X \text{ y } A \subseteq U\}.$$

(b) Sea X un conjunto infinito con la topología cofinita. Probar que para todo cerrado A de X se tiene que

$$A = \bigcap \{U : U \text{ abierto de } X \text{ tal que } A \subseteq U\}.$$

Pero X no es T_3 .

Ejercicio 6.52. Probar que todo espacio normal es regular.

(Indicación: Es similar a la prueba de la Proposición 6.32.)

Ejercicio 6.53. Sea X un espacio topológico tal que para cada $x \in X$, existe un entorno U de x tal que el subespacio $\overline{U}$ es regular. Probar que X es regular.

Ejercicio 6.54. Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Sea define la siguiente topología sobre X :

$$\tau_A = \{U \subseteq X : A \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Determinar si el espacio $\langle X, \tau_A \rangle$ es o no es normal.

Ejercicio 6.55. Sea X un espacio T_1 . Probar que X es normal si y sólo si para todo cerrado A y todo abierto U que contiene a A , existe un conjunto abierto V que contiene a A y $\overline{V} \subseteq U$.

(Indicación: Seguir un argumento similar al de la prueba de (1) de la Proposición 6.37.)

Ejercicio 6.56. Sea X un espacio T_1 . Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(I) X es normal;

(II) Para cada par de conjuntos cerrados disjuntos A y B , existe un conjunto abierto U de X tal que $A \subseteq U$ y $\overline{U} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 6.57. Sea X un espacio normal y sea $\mathcal{B}$ una base del espacio X . Probar que para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada $x \in B$, existe un $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \overline{B_0} \subseteq B$.

Ejercicio 6.58. Sean X e Y espacios topológicos. Probar que si el espacio producto $X \times Y$ es normal, entonces los espacios X e Y son normales.

Ejercicio 6.59. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios topológicos.

(a) Probar que si el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es regular, entonces cada uno de los espacios X_α ($\alpha \in \Gamma$) es regular.

(b) Probar que si el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es normal, entonces cada uno de los espacios X_α ($\alpha \in \Gamma$) es normal.

Ejercicio 6.60.

- (a) Un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.
- (b) Si X es un espacio normal y $f: X \rightarrow Y$ es una función continua cerrada y sobreyectiva, entonces Y es normal.

Ejercicio 6.61. Probar que todo espacio regular que es Lindelöf es normal.

(Indicación: Usar un argumento similar al de la demostración del Teorema 6.40.)

Lema de Urysohn, teorema de extensión de Tietze y teorema de metrización de Urysohn

Ejercicio 6.62 (Recíproca del Lema de Urysohn). Sea X un espacio topológico para el cual se cumple que para todo par de subconjuntos cerrados y disjuntos A y B , existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ y $B \subseteq f^{-1}(\{1\})$. Probar que X es normal.

Ejercicio 6.63. Probar que si X e Y son espacios topológicos homeomorfos y X es completamente regular, entonces Y es completamente regular.

Ejercicio 6.64. Sea X un espacio completamente regular, A un cerrado de X y $x_0 \notin A$. Sean a y b reales tal que $a < b$. Probar que existe una función continua $f: X \rightarrow [a, b]$ tal que $A \subseteq f^{-1}(\{a\})$ y $f(x_0) = b$.

Ejercicio 6.65. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de espacios topológicos. Probar que si el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha$ es completamente regular, entonces cada espacio X_α es completamente regular.

Ejercicio 6.66. Sea X un espacio completamente regular (Tychonoff). Sean F un subconjunto cerrado de X y K un subconjunto finito (no vacío) de X tales que $F \cap K = \emptyset$. Probar que existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(K) \subseteq \{0\}$ y $f(F) \subseteq \{1\}$.

Ejercicio 6.67 (Recíproca del Teorema de Extensión de Tietze). Sea X un espacio topológico. Probar que si para cada subconjunto cerrado A de X , toda función continua a valores reales $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ puede extenderse a una función continua $F: X \rightarrow \mathbb{R}$, entonces el espacio X es normal.

Ejercicio 6.68. Sea X un espacio T_1 . Sea $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una colección de funciones continuas $f_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la siguiente condición:

$$\forall x_0 \in X \text{ y para todo entorno } U \text{ de } x_0, \exists \alpha \in \Gamma \text{ tal que } f_\alpha(x_0) > 0 \text{ y } f_\alpha(U^c) \subseteq \{0\}. \quad (6.7)$$

Probar que la función $F: X \rightarrow \mathbb{R}^\Gamma$ definida por $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in \Gamma}$ es un embebimiento. Si cada $f_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$, entonces $F: X \rightarrow [0, 1]^\Gamma$ es un embebimiento.

(Indicación: Es análogo al Paso 2 de la prueba del Teorema 6.56.)

Ejercicio 6.69. Sea X un espacio topológico. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) X es completamente regular.
- (2) Existe una colección $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ de funciones continuas $f_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ que satisface la siguiente condición:

$$\forall x_0 \in X \text{ y para todo entorno } U \text{ de } x_0, \exists \alpha \in \Gamma \text{ tal que } f_\alpha(x_0) > 0 \text{ y } f_\alpha(U^c) \subseteq \{0\}. \quad (6.8)$$

- (3) X es homeomorfo a un subespacio de $[0, 1]^\Gamma$, para algún conjunto de índices Γ .

(Indicación: Para probar la implicación (1) $\Rightarrow$ (2), tome como conjunto de índices Γ al conjunto $\{(x, U) : x \in X \text{ y } U \text{ entorno de } x\}$.)

Ejercicio 6.70. Sea X un espacio topológico. Probar que X es completamente regular y satisface el 2° AN si y sólo si X es metrizable y separable.

Índice alfabético

$\mathcal{B}_K$, 14

$\mathcal{B}_S$, 13

$\mathcal{B}_u$, 13

$\mathbb{R}_K$, 14

$\mathbb{R}_S$, 14

$\mathbb{R}_u$, 13

τ_{cof} , 7

1°AN, 110

2°AN, 112

Abierto

 básico, 10

 subconjunto, 6

Arco-conexo, 79

Base, 9, 10

Bola abierta, 63

Camino, 78

Cantor

 conjunto, 97

Cerrado, 19

Clausura, 21

Compactificación, 103

 por un punto, 103

Componente, 81

Conexo

 por caminos, 79

Conjunto

 de Cantor, 97

 nunca denso, 98

 ternario de Cantor, 97

Convergencia

 de una sucesión, 27

Convergencia uniforme, 70

Cubrimiento abierto, 87

Derivado

 conjunto, 25

Distancia, 63

 del supremo, 66

 euclidea, 66

Embebimiento, 134

Entorno

 de un punto, 9

Espacio

T_0 , 117

T_1 , 118

T_2 , 119

T_3 , 120

$T_{3\frac{1}{2}}$, 128

T_4 , 121

$T_{5/2}$, 143

 compacto, 87

- completamente regular, 128
- conexo, 73
- de Hausdorff, 119
- de Lindelöf, 114
- Hausdorff, 27
- localmente compacto, 100
- metrizable, 65
- métrico, 63
- normal, 121
- regular, 120
- separable, 114
- totalmente desconexo, 84
- Tychonoff, 128
- Espacio topológico, 5
- Frontera, 30
- Función
 - abierta, 34
 - cerrada, 34
 - continua, 30
 - inclusión, 36
- Homeomorfismo, 35
- Interior, 28
- Lema de Zorn, 93
- Lema del Pegamento, 46
- Lindelöf, 114
- Localmente compacto, 100
 - en un punto, 100
- Localmente conexo, 85
- Métrica, 63
- Nunca denso
 - conjunto, 98
- PFI, 91
- Primer axioma de numerabilidad, 110
- Propiedad de intersección finita (PIF), 91
- Punto
 - aislado, 92
 - de acumulación, 25
 - límite, 25
- Recta dispersa, 38
- Segundo axioma de numerabilidad, 112
- Separación
 - de un espacio, 73
- Sorgenfrey
 - plano, 40
 - recta, 14
- Subbase, 11
- Subconjunto
 - denso, 24
- Subespacio, 17
 - compacto, 87
- Sucesión convergente, 27
- Topología, 5
 - cociente, 58
 - cofinita, 7
 - de cajas, 60
 - del rayo derecho, 8
 - discreta, 6
 - generada por una base, 13
 - indiscreta, 6
 - más fina, 9
 - más gruesa, 9
 - métrica, 64
 - producto (finita), 52

producto (general), [55](#)

subespacio, [17](#)

usual sobre $\mathbb{R}$, [13](#)

Bibliografía

- [1] M. E. Ascheri y M. E. Reid. *Nociones previas a la Topología Métrica*. EdUNLPam, Universidad Nacional de La Pampa 2008.
- [2] M. E. Ascheri y M. E. Reid. *Espacios Métricos*. EdUNLPam, Universidad Nacional de La Pampa 2008.
- [3] R. C. Freiwald. *Introduction to set theory and topology*. Washington University in St. Louis, 2014.
- [4] S. Lipschutz. *Theory and Problems of General Topology*. Schum's outline series. McGraw-Hill, 1965.
- [5] J. R. Munkres. *Topología*. Prentice Hall, 2002.
- [6] J. Thomas A regular space, not completely regular. *Amer. Math. Monthly*, 76(2), pp. 181–182, 1969.