Una dualidad topológica para conjuntos parcialmente ordenados

Luciano González, Ramon Jansana & Sergio Celani

Universidad Nacional de La Pampa
Universitat de Barcelona

LXII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas - UMA 2013

Rosario

17-20 de septiembre de 2013

Sea P un conjunto parcialmente ordenado (poset).

Definición

*Un subconjunto no vacío F de P es llamado un **filtro** si*

1. *si $a \leq b$ y $a \in F$ entonces, $b \in F$;*
2. *si $a, b \in F$ entonces, existe $c \in F$ tal que $c \leq a$ y $c \leq b$.*

$\mathcal{F}i(P)$ denota la familia de todos los filtros de P.

Espacios de Scott y Espacios sober

Definición

*Sea P un poset. La **topología de Scott** sobre el poset P es definida por: un subconjunto U de P es abierto syss*

1. *U es un up-set de P;*
2. *U es inaccesible por supremos dirigidos, esto es, si D es un subconjunto dirigido de P entonces,*

$$\bigvee^{\uparrow} D \in U \Longrightarrow D \cap U \neq \emptyset.$$

Definición

*Un espacio topológico X es **sober** syss cada subconjunto cerrado irreducible de X es de la forma $\overline{\{x\}}$ para un único punto x.*

Espacios de Scott y Espacios sober

Definición

*Sea P un poset. La **topología de Scott** sobre el poset P es definida por: un subconjunto U de P es abierto syss*

1. *U es un up-set de P;*
2. *U es inaccesible por supremos dirigidos, esto es, si D es un subconjunto dirigido de P entonces,*

$$\bigvee^{\uparrow} D \in U \Longrightarrow D \cap U \neq \emptyset.$$

Definición

*Un espacio topológico X es **sober** syss cada subconjunto cerrado irreducible de X es de la forma $\overline{\{x\}}$ para un único punto x.*

Dado un poset P consideramos el espacio topológico

$$X_P = \langle \mathcal{F}i(P), \mathcal{T} \rangle$$

donde $\mathcal{T}$ es la topología Scott del poset $\langle \mathcal{F}i(P), \subseteq \rangle$.

$KOF(X_P)$ denota la familia de todos los filtros abiertos compactos del espacio X_P. Entonces,

$$KOF(X_P) = \{\varphi_a : \ a \in P\}$$

donde para cada $a \in P$

$$\varphi_a = \{F \in \mathcal{F}i(P) : \ a \in F\}.$$

Proposición

$KOF(X_P)$ es una base del espacio X_P.

Dado un poset P consideramos el espacio topológico

$$X_P = \langle \mathcal{F}i(P), \mathcal{T} \rangle$$

donde $\mathcal{T}$ es la topología Scott del poset $\langle \mathcal{F}i(P), \subseteq \rangle$.

$KOF(X_P)$ denota la familia de todos los filtros abiertos compactos del espacio X_P. Entonces,

$$KOF(X_P) = \{\varphi_a : \ a \in P\}$$

donde para cada $a \in P$

$$\varphi_a = \{F \in \mathcal{F}i(P) : \ a \in F\}.$$

Proposición

$KOF(X_P)$ es una base del espacio X_P.

Dado un poset P consideramos el espacio topológico

$$X_P = \langle \mathcal{F}i(P), \mathcal{T} \rangle$$

donde $\mathcal{T}$ es la topología Scott del poset $\langle \mathcal{F}i(P), \subseteq \rangle$.

$KOF(X_P)$ denota la familia de todos los filtros abiertos compactos del espacio X_P. Entonces,

$$KOF(X_P) = \{\varphi_a : \ a \in P\}$$

donde para cada $a \in P$

$$\varphi_a = \{F \in \mathcal{F}i(P) : \ a \in F\}.$$

Proposición

$KOF(X_P)$ es una base del espacio X_P.

Teorema

La aplicación $\varphi : P \to \langle KOF(X_P), \subseteq \rangle$ *dada por*

$$\varphi(a) = \varphi_a$$

para cada $a \in P$, *es un isomorfismo de orden.*

Definición

Un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ *es llamado un* ***P-espacio*** *si:*

1. X *es sober;*
2. $KOF(X)$ *forman una base del espacio.*

Proposición

Un espacio X *es un* ***P****-espacio syss satisface las siguientes condiciones:*

1. X *es un espacio de Scott;*
2. $KOF(X)$ *constituye una base para* X*; y*
3. *Existe el supremo de subconjuntos dirigidos de* X *(con respecto a orden especialización* $\sqsubseteq$*).*

Definición

*Un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es llamado un **P-espacio** si:*

1. *X es sober;*
2. *$KOF(X)$ forman una base del espacio.*

Proposición

*Un espacio X es un **P**-espacio syss satisface las siguientes condiciones:*

1. *X es un espacio de Scott;*
2. *$KOF(X)$ constituye una base para X; y*
3. *Existe el supremo de subconjuntos dirigidos de X (con respecto a orden especialización $\sqsubseteq$).*

Teorema

Sea X un P-espacio. Consideramos el poset $P_X = \langle KOF(X), \subseteq \rangle$. Entonces, la aplicación $\theta : X \to X_{P_X}$ definida por

$$\theta(x) = \{U \in KOF(X) : \ x \in U\}$$

es un homeomorfismo.

Definimos dos categorías $\mathbb{P}$ y $\mathbb{T}op(P)$ por

- un objeto de $\mathbb{P}$ es un poset;
- un morfismo $j : P \to Q$ de $\mathbb{P}$ es una función creciente de P a Q tal que j^{-1} preserva filtros.

- un objeto de la categoría $\mathbb{T}op(P)$ es un P-espacio;
- un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathbb{T}op(P)$ es una aplicación tal que f^{-1} preserva filtros abiertos compactos.

Definimos dos categorías $\mathbb{P}$ y $\mathbb{T}op(P)$ por

- un objeto de $\mathbb{P}$ es un poset;
- un morfismo $j : P \to Q$ de $\mathbb{P}$ es una función creciente de P a Q tal que j^{-1} preserva filtros.

- un objeto de la categoría $\mathbb{T}op(P)$ es un P-espacio;
- un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathbb{T}op(P)$ es una aplicación tal que f^{-1} preserva filtros abiertos compactos.

Definimos dos categorías $\mathbb{P}$ y $\mathbb{T}op(P)$ por

- un objeto de $\mathbb{P}$ es un poset;
- un morfismo $j : P \to Q$ de $\mathbb{P}$ es una función creciente de P a Q tal que j^{-1} preserva filtros.

- un objeto de la categoría $\mathbb{T}op(P)$ es un P-espacio;
- un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathbb{T}op(P)$ es una aplicación tal que f^{-1} preserva filtros abiertos compactos.

La Dualidad

Teorema

Las categorías $\mathbb{P}$ y $\mathbb{T}op(P)$ son dualmente equivalentes a través de los funtores:

1. $\Gamma : \mathbb{P} \to \mathbb{T}op(P)$ *es definido por:*
   - $\Gamma(P) = X_P$;
   - *Para un morfismo* $j : P \to Q$ *de la categoría* $\mathbb{P}$, $\Gamma(j) : X_Q \to X_P$ *es dada por* $\Gamma(j) = j^{-1}$.
2. $\Delta : \mathbb{T}op(P) \to \mathbb{P}$ *es definido por:*
   - $\Delta(X) = \langle KOF(X), \subseteq \rangle$;
   - *Para un morfismo* $f : X \to Y$ *de la categoría* $\mathbb{T}op(P)$, $\Delta(f) : KOF(Y) \to KOF(X)$ *es dado por* $\Delta(f) = f^{-1}$.

Dos aplicaciones de la dualidad

Dado un P-espacio X definimos el sistema clausura $Fsat(X)$ generado por $OF(X)$. Esto es, $S \in Fsat(X)$ syss

$$S = \bigcap \{F \in OF(X) : \ S \subseteq F\}.$$

$$KOF(X) \subseteq OF(X) \subseteq Fsat(X).$$

Proposición

Sea X un P-espacio. Entonces $Fsat(X)$ es la extensión canónica del poset $KOF(X)$.

Dos aplicaciones de la dualidad

Dado un P-espacio X definimos el sistema clausura $Fsat(X)$ generado por $OF(X)$. Esto es, $S \in Fsat(X)$ syss

$$S = \bigcap\{F \in OF(X) : \ S \subseteq F\}.$$

$$KOF(X) \subseteq OF(X) \subseteq Fsat(X).$$

Proposición

Sea X un P-espacio. Entonces $Fsat(X)$ es la extensión canónica del poset $KOF(X)$.

Dos aplicaciones de la dualidad

Dado un P-espacio X definimos el sistema clausura $Fsat(X)$ generado por $OF(X)$. Esto es, $S \in Fsat(X)$ syss

$$S = \bigcap \{F \in OF(X) : \ S \subseteq F\}.$$

$$KOF(X) \subseteq OF(X) \subseteq Fsat(X).$$

Proposición

Sea X un P-espacio. Entonces $Fsat(X)$ es la extensión canónica del poset $KOF(X)$.

Dos aplicaciones de la dualidad

Dado un P-espacio X definimos el sistema clausura $Fsat(X)$ generado por $OF(X)$. Esto es, $S \in Fsat(X)$ syss

$$S = \bigcap \{F \in OF(X) : \; S \subseteq F\}.$$

$$KOF(X) \subseteq OF(X) \subseteq Fsat(X).$$

Proposición

Sea X un P-espacio. Entonces $Fsat(X)$ es la extensión canónica del poset $KOF(X)$.

Definición

*Sean $P_1, \ldots, P_{n+1}$ posets con último elemento. Una aplicación $j : P_1 \times \cdots \times P_n \to P_{n+1}$ es **cuasi-monótonas** si es creciente o decreciente en cada argumento.*

Definición

*Sean $X_1, \ldots, X_{n+1}$ P-espacios. Una función $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_{n+1}$ es llamada **fuertemente-continuas** si es continua y preserva la relación $\ll$.*

donde

$$x \ll y \iff \begin{array}{l} \exists U \in KOF(X) \text{ tal que } y \in U \\ \forall V \in KOF(X)\,(x \in V \implies U \subseteq V) \end{array}$$

Dos aplicaciones de la dualidad

Definición

*Sean $P_1, \ldots, P_{n+1}$ posets con último elemento. Una aplicación $j : P_1 \times \cdots \times P_n \to P_{n+1}$ es **cuasi-monótonas** si es creciente o decreciente en cada argumento.*

Definición

*Sean $X_1, \ldots, X_{n+1}$ P-espacios. Una función $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_{n+1}$ es llamada **fuertemente-continuas** si es continua y preserva la relación $\ll$.*

donde

$$x \ll y \iff \begin{array}{l} \exists U \in KOF(X) \text{ tal que } y \in U \\ \forall V \in KOF(X)\,(x \in V \implies U \subseteq V) \end{array}$$

Dos aplicaciones de la dualidad

Proposición

Las aplicaciones cuasi-monótonas

$$j : P_1 \times \cdots \times P_n \to P_{n+1}$$

están topologicamente representadas por funciones fuertemente-continuas

$$f : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_{n+1}$$

donde cada X_i es el P-espacio dual de P_i.

Referencias

1. J. Michael Dunn, Mai Gehrke, Alessandra Palmigiano, *Canonical Extensions and Relational Completeness of Some Substructural Logics*,The Journal of Symbolic Logic, Vol. 70, No. 3 (2005), pp. 713-740.
2. M. A. Moshier and P. Jipsen, *Topological duality and lattice expansions Part I: A topological construction of canonical extensions*, preprint 2009.
3. M. A. Moshier and P. Jipsen, *Topological duality and lattice expansions Part I: Lattice expansions with quasioperators*, preprint 2009.
4. P. T. Johnstone, Stone spaces. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
5. S. Vickers, Topology via Logic. Cambridge Tracks in Theoretical Computer Science, 5. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Muchas Gracias!